8　逆行列の計算・連立 1 次方程式 の解答例

演習 8.1 ※ (1) のみやや丁寧に, (2)(3)(4) は省略して書きます.

$$
(1)\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 2 \end{array}\right).
$$

よって, もとの行列は正則で, 逆行列は, $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 行基本変形を何回か施して,

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right)
$$

とできるので, もとの行列は正則で, 逆行列は, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5/2 & -1/2 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 行基本変形を何回か施すと,

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)
$$

となってしまうので, もとの行列は正則でない.

(4) 行基本変形を何回か施して,

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1/3 & -2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

とできるので, もとの行列は正則で, 逆行列は, $\begin{pmatrix} 3 & 1/3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 1/3 & 1 & -2/3 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

演習 8.2 (1) 行基本変形を何回か施して,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

とできるので, 解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 行基本変形を何回か施すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

となるが, これを対応する連立 1 次方程式に直すと 3 行目が $0 = -2$ という矛盾した式になるため, 解なし.

(3) 行基本変形を何回か施すと,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -9 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 13 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり, これを対応する連立 1 次方程式に直すと,

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

となる. 解の自由度は $4 - 2 = 2$ で, 任意定数が 2 つ出てくる. 例えば x_3, x_4 を任意定数とすれば, 一般解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_3, x_4 \text{ は任意})$$

と書ける.

演習 8.3 行基本変形を何回か施すと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & (-5/3)a \\ 0 & 1 & 2 & (4/3)a \\ 0 & 0 & 0 & 3+a \end{array}\right)$$

となり, これを対応する連立 1 次方程式に直すと,

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = (-5/3)a \\ x_2 + 2x_3 = (4/3)a \\ 0 = 3 + a \end{cases}$$

となる. 3 行目に注目すれば, 解が存在するための条件は $a = -3$ であることが分かる.

$a = -3$ のとき, $x_3 = \alpha$ を任意定数とすると, 一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる.