5　行列のブロック分割／正則行列 の解答例

演習 5.1 (1) k に関する帰納法で示す. $k=1$ の場合は明らか. 以下, $k>1$ のとき, $k-1$ まで成立すると仮定して k の場合を示す. 仮定により

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k} &= \begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (aE_m)(a^{k-1}E_m)+AO & (aE_m)((k-1)a^{k-2}A)+A(a^{k-1}E_n) \\ O(a^{k-1}E_m)+(aE_m)O & O(((k-1)a^{k-2}A))+(aE_n)(a^{k-1}E_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^kE_m & ka^{k-1}A \\ O & a^kE_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって, k の場合も成り立つ.

(2) $\begin{pmatrix} 32 & 0 & 80 & 240 \\ 0 & 32 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

注意 1. 細かい点ですが, 上記の (1) に出題ミスがありました. $a=0$, $k=1$ のときは, a^{k-1} の部分が 0^0 となって定義できません. だから, 上記の証明においても厳密には $a=0$ の場合を特別扱いする必要があります ($a=0$ の場合はまず $k=2$ の場合を示してから帰納法を用いるなど).

　実は去年担当した「線形代数 I 演習」と同じ問題を出題したのですが, この点を忘れていたので, 今年も同じ注意書きを書く破目になってしまいました $\cdots$

演習 5.2 $A^2=A$ かつ A が正則行列ならば $A=E$ となることを示せば良い. A が正則行列ならば逆行列 A^{-1} が存在するので, $A^2=A$ の両辺に左から (右からでもよい) A^{-1} をかけると,

$$(\text{左辺}) = A^{-1}A^2 = (A^{-1}A)A = EA = A, \quad (\text{右辺}) = A^{-1}A = E.$$

よって, $A=E$ を得る.

演習 5.3 (1) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

演習 5.4 (1) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_{11} + c_{12} = 1 \\ 7c_{11} + 2c_{12} = 0, \end{cases} \begin{cases} 3c_{21} + c_{22} = 0 \\ 7c_{21} + 2c_{22} = 1. \end{cases}$

これは解 $c_{11} = -2$, $c_{12} = 7$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = -3$ をもつ. そこで, $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ が実際逆行列になっているかどうかを確かめてみると,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから, 実際逆行列になっている. よって, 与えられた行列は, 逆行列 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ をもち, 正則であることがわかる.

(2) 上記と同様にすれば, 逆行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ をもち, 正則であることが分かる.

(3) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11} + 2c_{12} = 1 \\ 2c_{11} + 4c_{12} = 0, \end{cases} \begin{cases} c_{21} + 2c_{22} = 0 \\ 2c_{21} + 4c_{22} = 1. \end{cases}$

これは解をもたない (例えば, $c_{11} + 2c_{12} = 1$ ならば $2c_{11} + 4c_{12} = 2$ となるはずだから $2c_{11} + 4c_{12} = 0$ は満たさない). よって $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ には逆行列は存在せず, 非正則である.

(4) 正則行列である. 演習 5.3 (1) により,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 16 & -39 \\ 1 & -3 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(5) 正則行列である. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と演習 5.3 (2) により,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

演習 5.5 ((ii) $\Rightarrow$ (iv)) $ad - bc \neq 0$ のとき,

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと, $AB = BA = E$ となり, A に逆行列 $A^{-1} = B$ が存在することが分かる.

((iv) $\Rightarrow$ (iii)) $A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ac_{11} + bc_{21} = 1 \\ cc_{11} + dc_{21} = 0, \end{cases} \begin{cases} ac_{12} + bc_{22} = 0 \\ cc_{12} + dc_{22} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c_{11}\boldsymbol{a} + c_{21}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1, \ \ c_{12}\boldsymbol{a} + c_{22}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$ だから, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表わされることが分かり, 従って, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張ることが分かる.

[別証明の例] ((iv) $\Rightarrow$ (ii)) $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくと, $AB = (\det A)E$ となる. ここで $\det A = 0$ であったとすると $AB = O$ となるが, この両辺に左から A^{-1} をかけると $B = O$ となり, $a = b = c = d = 0$ であることになってしまう. これは $A = O$ を意味するが, それでは A が正則行列ではないことになってしまい, 矛盾が生じる. よって $\det A \neq 0$.

((iv) $\Rightarrow$ (i)) $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ であったとする. 式を行列で書き直すと

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るが, この式の両辺に左から A^{-1} をかけると $c_1 = c_2 = 0$ が分かる. よって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である.