4 行列の基本演算

演習 4.1 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

演習 4.2 (1) A, B を n 次の正方行列とすると, AB, BA も n 次の正方行列となる. このとき $AB = BA$ が成立するとは限らない. $AB \neq BA$ となるような例を挙げよ.

(2) A を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{x}$ を n 項縦ベクトルとするとき, $A\boldsymbol{x}$ は m 項縦ベクトルとなる. $A \neq O$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるような A, $\boldsymbol{x}$ の例を挙げよ.

演習 4.3 A, B を正方行列とする. 行列の結合法則・分配法則を使って, 次の式が成立することを示せ.

(1) $(AB)^2 = (A(BA))B$

(2) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 4.4 A を 3 次の交代行列 (${}^tA = -A$ を満たす 3 次の正方行列) とする. 任意の奇数 $n \geq 0$ に対し, A^n は A のスカラー倍になることを示せ.