4　行列の基本演算 の解答例

演習 4.1 (1) -13　(2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -13 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 27 & 30 & 24 \\ 63 & 84 & 69 \\ 99 & 138 & 114 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$

演習 4.2 (1) 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

演習 4.3 (1) $(AB)^2 = (AB)(AB) = ((AB)A)B = (A(BA))B$.

(2) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

演習 4.4 A は 3 次の交代行列なので,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる. これに対し A^2, A^3 を具体的に計算してみると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -a(a^2+c^2+b^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ a(a^2+b^2+c^2) & 0 & -c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & c(b^2+a^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)A$$

を得る. よって, とりあえず $n = 1, 3$ の場合は証明できた.

以下, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対し,

$$A^{2m+1} = (-1)^m (a^2+b^2+c^2)^m A$$

となることを数学的帰納法で示す. $m=0,1$ の場合は既に示したので, 次に $m>1$ の場合を考えて, A^{2m-1} については成立したと仮定する. すると,

$$
\begin{aligned}
A^{2m+1}=A^{2m-1}A^2 &= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}AA^2=(-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}A^3 \\
&= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}(-(a^2+b^2+c^2))A \\
&= (-1)^m(a^2+b^2+c^2)^mA
\end{aligned}
$$

となり, A^{2m+1} についても成立することが分かる. □