

3 一般の数ベクトル

今日は、ベクトルの線形独立・線形従属について (特に裏面では、定義に関して勘違いしやすいポイントについて) 演習を行っていきたいと思います。以下で、 \mathbb{R} は実数全体、 \mathbb{C} は複素数全体を表すものとします。ここからは複素数はスカラー (定数) と考えるので、扱いが前回などとは異なることに注意してください (前回などは平面ベクトルと対応させる考え方を強調しましたが、ここからの扱いではベクトルではなくあくまでスカラーと考えます)。

演習 3.1 次で与えられる 3 項実ベクトル (空間ベクトル) の組が (\mathbb{R} 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

演習 3.2 次で与えられる 3 項複素ベクトルの組が (\mathbb{C} 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + 3\sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

K を \mathbb{R} または \mathbb{C} とするとき, m 個の n 項数ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in K^n$ について, 次の二つの条件を考えてみます:

- (a) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が線形独立
- (a') $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ のうちの 2 つも線形独立

これらが異なる条件であることは, 例えば前々回の演習 1.2 で分かると思います. しかし, 今度はその否定命題として, 次の (b) と (b') とを考えてみます:

- (b) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が線形従属
- (b') $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ のうち, ある $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ ($i \neq j$) について $\mathbf{a}_i = c\mathbf{a}_j$ (c : 定数) と書ける

これらも異なる条件なのですが, (b) と (b') を混同する人が非常に多いので気を付けてください.

演習 3.3 (1) 上記で, (b') が実際に (a') の否定命題であることを示せ (つまり, (a') が成立しない \Leftrightarrow (b') が成立する, を示せ).

(2) 3 項ベクトルの組で, 上記の (b) が成り立つが (b') は成り立たないような例を挙げよ (演習 3.1, 3.2 に該当するものがあればそれを選んでよい).

(3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が線形従属であっても \mathbf{a}_1 が \mathbf{a}_2 のスカラー倍にはならないことがある. そのような例を挙げよ.

細かいことばかりですが, 数学では厳密に議論しなければなりません. いずれも演習などの誤答としてよく見られる, 間違いやすいポイントなので, 今回はあえてそれを演習問題にしてみました.

時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 3.4 K を \mathbb{R} または \mathbb{C} とする. K 上の数ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が線形従属ならば, ある自然数 i ($1 \leq i \leq m$) が存在して, \mathbf{a}_i が \mathbf{a}_i 以外の他のベクトルたちの線形結合で表せること, すなわち, ある定数 $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m \in K$ が存在して,

$$\mathbf{a}_i = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \dots + c_m\mathbf{a}_m$$

と表せることを示せ.