3　一般の数ベクトル の解答例

演習 3.1 (1) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$. よって, <u>線形独立</u>.

(2) $c_1 \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ -\pi c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 6c_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3c_3 \\ c_2 = (1+3\pi)c_3. \end{cases}$ 例えば $c_3 = 1$, $c_1 = -3$, $c_2 = 1 + 3\pi$ とすれば,

$$-3 \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 2 \end{pmatrix} + (1+3\pi) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, <u>線形従属</u>.

(3) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_3 = -4c_2. \end{cases}$ 例えば $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -4$ とすれば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, <u>線形従属</u>.

(4) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$. よって, <u>線形独立</u>.

演習 3.2 (1) $c_1\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1+\sqrt{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\sqrt{-1}c_1+c_2&=&0\\ \sqrt{-1}c_1+c_2&=&0\\ \sqrt{-1}c_1+2c_2+(1+\sqrt{-1})c_3&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_2=-\sqrt{-1}c_1\\ c_3=\dfrac{\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}c_1=\dfrac{1+\sqrt{-1}}{2}c_1.\end{array}\right.$$

例えば $c_1=2,\ c_2=-2\sqrt{-1},\ c_3=1+\sqrt{-1}$ とすれば,

$$2\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}\end{pmatrix}-2\sqrt{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+(1+\sqrt{-1})\begin{pmatrix}0\\0\\1+\sqrt{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

よって, <u>線形従属</u>.

(2) $c_1\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\ -1\\ -2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1-\sqrt{-1}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\sqrt{-1}c_1+c_2+(1-\sqrt{-1})c_3&=&0\\ -c_1+c_2&=&0\\ -2c_1+2c_2&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_2=c_1\\ c_3=-\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}c_1=-\sqrt{-1}c_1.\end{array}\right.$$

例えば $c_1=c_2=1,\ c_3=-\sqrt{-1}$ とすれば,

$$\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\ -1\\ -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\sqrt{-1}\begin{pmatrix}1-\sqrt{-1}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

よって, <u>線形従属</u>.

(3) $c_1\begin{pmatrix}2+\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1}\\ 1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1+3\sqrt{-1}\\ 1-\sqrt{-1}\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}(2+\sqrt{-1})c_1+(1+3\sqrt{-1})c_2&=&0\\ -\sqrt{-1}c_1+(1-\sqrt{-1})c_2&=&0\\ c_1+2c_3&=&0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c_3=-\dfrac{1}{2}c_1\\ c_2=\dfrac{\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}c_1=-\dfrac{2+\sqrt{-1}}{1+3\sqrt{-1}}c_1=\dfrac{-1+\sqrt{-1}}{2}c_1.\end{array}\right.$$

例えば $c_1=2,\ c_2=-1+\sqrt{-1},\ c_3=-1$ とすれば,

$$2\begin{pmatrix} 2+\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + (-1+\sqrt{-1})\begin{pmatrix} 1+3\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, <u>線形従属</u>.

(4) $c_1\begin{pmatrix} 2+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2-\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} (2+\sqrt{-1})c_1+(2-\sqrt{-1})c_2+c_3 & = & 0 \\ \sqrt{-1}c_1+c_2+c_3 & = & 0 \\ c_1+c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_3=-c_1 \\ c_2=-\dfrac{1+\sqrt{-1}}{2-\sqrt{-1}}c_1=(1-\sqrt{-1})c_1 \end{array} \right.$$

(ここで, $-\dfrac{(2-\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})}{1+\sqrt{-1}}=-\dfrac{1-3\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\neq 1$ なので)
$\Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=0$. よって, <u>線形独立</u>.

演習 3.3 (1) ($\Rightarrow$) (a') が成立しないとき, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ のうちある 2 つが線形従属になるはずである. それを $\boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{a}_l$ とすると, $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ なる $c_1,c_2\in K$ が存在して $c_1\boldsymbol{a}_k+c_2\boldsymbol{a}_l=\boldsymbol{0}$ が成り立つ. $c_1\neq 0$ のとき, $c=-c_2/c_1$ とすれば $\boldsymbol{a}_k=c\boldsymbol{a}_l$ となるので, $i=k,\ j=l$ とすればよい. $c_1=0$ (このとき $c_2\neq 0$) のときは, $c=0\ (=-c_1/c_2)$ とすれば $\boldsymbol{a}_l=c\boldsymbol{a}_k$ となるので, $i=l,\ j=k$ とすればよい.

($\Leftarrow$) $c_1=1,\ c_2=-c$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_i+c_2\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ が線形従属であるから, (a') は成立しない.

(2) 例えば, 演習 3.1 (2)(3), 演習 3.2 (1)(2)(3) はそのような例になっている.

(3) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が線形従属のとき, $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ なる $c_1,c_2\in K$ が存在して $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ が成り立つ. $c_1\neq 0$ のとき, $c=-c_2/c_1$ とすれば $\boldsymbol{a}_1=c\boldsymbol{a}_2$ となるので, 問題文で求めているような例があるとすれば, 少なくとも $c_1=0,\ c_2\neq 0$, 従って $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ でなければならない. またこのときもし $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$ であったとすると, 任意の $c\in K$ に対し $\boldsymbol{a}_1=c\boldsymbol{a}_2$ となってしまう. 残る可能性は $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ の場合しかない. この場合, $c_1=0,\ c_2=1$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は線形従属であるが, $\boldsymbol{a}_2$ のスカラー倍はすべて $\boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{a}_1$ と一致するはずがない. よって, $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ となる例を一つでもとれば正解.

演習 3.4 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ は線形従属なので, ある定数の組 $b_1,\dots,b_m\in K$ が存在して,

$$b_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},\quad (b_1,\dots,b_m)\neq(0,\dots,0).$$

すると, $(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ だから, ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して $b_i \neq 0$ となる. そこで, $c_j = -\dfrac{b_j}{b_i}$ $(j = 1, \ldots, m,\ j \neq i)$ とおけば, 上記の式により,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m.$$