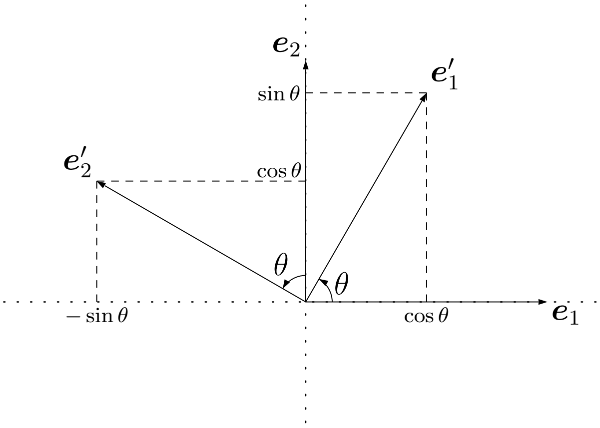
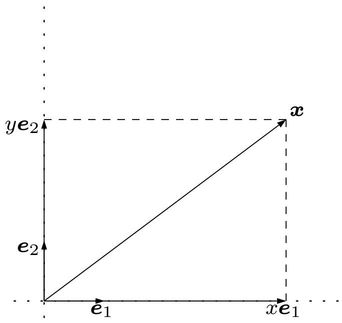
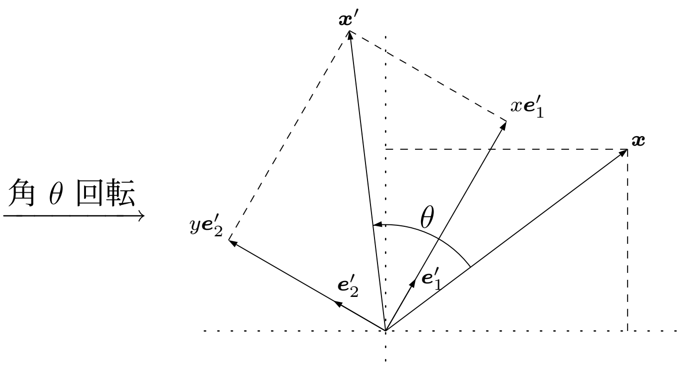
2　平面ベクトル・複素数 (その２) の解答例

演習 2.1 (1) $\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi/2) \\ \sin(\theta+\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. (下図参照)



(2) (上の図より縮尺を小さくしています)





$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ だから, 左の図のように, $\boldsymbol{x}$ は $x\boldsymbol{e}_1$ と $y\boldsymbol{e}_2$ によって作られる長方形の対角線にあたるベクトルである. この長方形全体を角 θ 回転したものは, $x\boldsymbol{e}_1'$ と $y\boldsymbol{e}_2'$ によって作られる長方形で, $\boldsymbol{x}'$ はその対角線にあたるベクトルであることが分かる. よって, $\boldsymbol{x}' = x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2'$.

(3) 上記の (1), (2) により,

$$\boldsymbol{x}' = x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

よって, 表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である.

(4) $\boldsymbol{e}_1$ を角 θ_1 回転した後に角 θ_2 回転すると,

$$\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

一方, $\boldsymbol{e}_1$ を角 $\theta_1+\theta_2$ 回転したものは,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

であり, 両者が一致するので

$$\begin{cases} \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{cases}$$

を得る.

演習 2.2 (1) $c = a + b\sqrt{-1}$ とすると, $cz = (ax-by) + (bx+ay)\sqrt{-1}$ だから,

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}.$$

よって, この変換は $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を表現行列とする 1 次変換である.

(2) $c = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ のとき, (1) で求めた表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり, 演習 2.1 (3) で求めた表現行列と一致する.

演習 2.3 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とおく.

((a) $\Rightarrow$ (b)) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立であるとする. まず, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で表すことを考える.

仮定より, $a_1 \neq 0$ または $b_1 \neq 0$ である ($a_1 = b_1 = 0$ のとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立ではありえないので). そこで, 必要ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を入れ替えて $a_1 \neq 0$ であるとしてよい. このとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で $\begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$ の形のベクトルをつくることを考えると,

$$-\frac{b_1}{a_1}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -\dfrac{b_1 a_2}{a_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1} \end{pmatrix}$$

を得る．ここで，もし $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ であったとすると $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であることになってしまうので，$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ が成り立つことがわかる．そこで，$d = a_1b_2 - b_1a_2$ とおいて，上記の式に a_1/d をかければ，

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{a_1}{d}\boldsymbol{b}$$

を得る．さらに $\boldsymbol{e}_1$ の方も

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{d}\boldsymbol{a} - \frac{a_2}{d}\boldsymbol{b}$$

と表せる．

すると，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = x_1\left(\frac{b_2}{d}\boldsymbol{a} - \frac{a_2}{d}\boldsymbol{b}\right) + x_2\left(-\frac{b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{a_1}{d}\boldsymbol{b}\right) = \frac{x_1b_2 - x_2b_1}{d}\boldsymbol{a} + \frac{-x_1a_2 + x_2a_1}{d}\boldsymbol{b}$$

と表せることがわかる．よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^2$ を張る．

((a) $\Leftarrow$ (b)) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張るとする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であったと仮定して矛盾を導くことにする．このときある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ で $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ を満たすものが存在して $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる．もし $c_1 \neq 0$ ならば $c = -c_2/c_1$ とすれば $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ となり，$c_1 = 0$ のときは $c_2 \neq 0$ となり $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を得るから，$c = 0$ とすれば $\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ となる．そこで，必要ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を入れ替えて，$\boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a}$ ($^\exists c \in \mathbb{R}$) であったとしてよい．また，このときもし $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とすると $\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{0}$ となって $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合が $\boldsymbol{0}$ だけになってしまうので，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ となるはず．よって，a_1, a_2 のうちどちらかは 0 でない．

すると，$a_1 \neq 0$ の場合，$\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合では表せない．なぜなら，

$$\boldsymbol{e}_2 = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = (c_1 + c_2c)\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \begin{cases} (c_1 + c_2c)a_1 = 0 \\ (c_1 + c_2c)a_2 = 1 \end{cases}$$

で，第１式を満たすためには $c_1 + c_2c = 0$ でなければならないが，このとき $(c_1 + c_2c)a_2 = 0$ となってしまい第２式が満たされないので，この条件を満たす定数 c_1, c_2 は存在しないからである．しかし，これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^2$ を張るということに反する．一方，$a_2 \neq 0$ のときも同様に $\boldsymbol{e}_1$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合では表わせないことになり，矛盾が生じる．従って，結局 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属であるという仮定は間違っており，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は線形独立である．□

別証明としては，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ を c_1, c_2 に関する連立方程式とみて解く方法などがあります．

注意. $d = a_1 b_2 - a_2 b_1$ とおくと, 上記の証明により,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が線形独立} \Leftrightarrow d \neq 0$$

となることがわかります. この d という量は, 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の <u>行列式</u> と呼ばれるもので, 今後重要になってきます (行列式については 2 学期に線形代数 II の授業で勉強します).