1 平面ベクトル・複素数

次の演習 1.1 から演習 1.4 までのうち 3 つを選んで解け. (時間が余ったら残りの 1 つも解いてください. それを今回の $+\alpha$ の問題とします.)

演習 1.1 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の (1)〜(3) のベクトルが $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) の形 ($\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合) に表せるかどうかを調べ, もし表せるならば c_1, c_2 にあたる数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 1.2 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を張ることを示せ. (任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ となる $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が必ず存在することを示せ.)

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうちどの 2 つも線形独立になることを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立か線形従属かを述べよ.

演習 1.3 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ に直交し原点を通る直線の方程式を書け. (根拠も述べること.)

複素数 z の偏角を θ とすると, z は

$$z = |z|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \quad (= |z|e^{\sqrt{-1}\theta})$$

と書ける (最後はオイラーの公式による). このような複素数の書き方を**極形式**と呼ぶ.

演習 1.4 (1) $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)$ とするとき, 三角関数の加法定理を用いて

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1+\theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2)\} \quad (= |z_1||z_2|e^{\sqrt{-1}(\theta_1+\theta_2)})$$

が成り立つことを示せ.

(裏面に続く)

(2) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{-1}$ を極形式で表して,

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{100}, \quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{100}, \quad (\sqrt{3}-\sqrt{-1})^4$$

を求めよ.

(3) 3 乗して -1 になる複素数をすべて求めよ.