9 行列の階数と連立 1 次方程式

演習 9.1 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ があるとき, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならばその方程式は**斉次**, そうでないときは**非斉次**という.

斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合, 少なくとも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は解 (これを**自明な解**という) なので,「解なし」ということはない. n を A の列の数 (= 未知変数の数) とし, $r = \operatorname{rank} A$ とすると, 解の自由度は $n - r$ となる. ここで, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を二つの解とすると, $A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ だから, 任意の定数 $c_1, c_2 \in K$ に対し

$$A(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1A\boldsymbol{x}_1 + c_2A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

となり, 線形結合 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ も解になる. 解の自由度が $n - r$ であることから, 斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はある $n - r$ 個の線形独立な解の組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ をもち, 一般解は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける (ただし, $r = n$ のときは解は自明な解のみ). このような $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という.

演習 9.2 次の斉次連立 1 次方程式の基本解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

一般の (斉次とは限らない) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について, 右辺を $\boldsymbol{0}$ にした斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解ともとの方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解には次のような関係がある.

まず, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ とする. もし $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するなら, そのうちの一つを $\boldsymbol{g}$ とすると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} + c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける. (これは次の問題を解いた結果の解釈に役立ててください).

演習 9.3 次の連立 1 次方程式の一般解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

連立 1 次方程式の解全体を幾何的にみた場合, 自由度というのは解全体がなす図形の次元 (解が動ける次元) を表している (このことを理解するために, 次のような問題をやってみてください).

演習 9.4 xyz 空間座標に関する方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{aligned}$$

で与えられる三つの平面が, (1) ちょうど一点を共有するための条件, (2) ちょうど一本の直線を共有するための条件, (3) 一つも共有点をもたないための条件, をそれぞれ行列を用いて述べよ.