9 行列の階数と連立 1 次方程式 の解答例

演習 9.1 基本変形を何回か施して階段状の行列にできれば, その階段の段数として行列の階数が分かる.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 2.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 3.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 2.

演習 9.2 係数行列に行変形を施して簡約階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 13 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. よって問題の式と同値な式として

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

を得る. $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$ (任意定数) とすると, 一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. よって基本解は $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

演習 9.3 係数行列が共通なので, いっぺんに解いてしまうことにする.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -5 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & 6 & 13 & -7 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 25 & 65 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -35 & -92 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 & 21 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -10 & -27 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -35 & -92 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 & 21 \end{array}\right)$$

より, 一般解はそれぞれ次のようになる:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -35 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}).$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -92 \\ 0 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}).$$

演習 9.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 連立 1 次方程式に解が存在し, かつ, 解の自由度が 0 であれば良いので, 求める条件は

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = 3 \quad (\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3).$$

(2) 連立 1 次方程式に解が存在し, かつ, 解の自由度が 1 であれば良いので, 求める条件は

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = 2.$$

(3) 連立 1 次方程式に解が存在しなければ良いので, 求める条件は,

$$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b}).$$