7 簡約階段行列・掃き出し法 の解答例

演習 7.1 ※ (1)(2) のみ基本変形の経緯を書き, 他は結果だけ書きます.

(1)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

演習 7.2 A に施した基本変形に対応する基本行列を順番に $Q_1, \dots, Q_r$ とすると,

$$Q_r \cdots Q_1 A = B.$$

$Q_1, \dots, Q_r$ はすべて正則行列であるから, 左から $Q_r^{-1}, \dots, Q_1^{-1}$ を順番にかけて

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} B$$

を得る. ここで, 正則行列の積は正則行列 (教科書, 定理 1.4) だから, B が正則ならば A も正則である.

演習 7.3 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

と変形されるので, 正則行列である.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

と変形されるので, 正則ではない.

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

と変形されるので, 正則行列である.