

6 行列のブロック分割 / 正則行列

演習 6.1 (1) A を $m \times n$ 行列, $a (\neq 0)$ を定数とすると, $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k E_m & ka^{k-1} A \\ O & a^k E_n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5$ を計算せよ.

演習 6.2 A を n 次の正方行列とする. もし $A^2 = A$ ならば, $A = E$ であるか, または A は正則行列ではないことを示せ.

演習 6.3 (1) A を m 次正則行列, B を n 次正則行列, C を $m \times n$ 行列とすると,

$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) A を m 次正則行列, B を n 次正則行列とすると, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

演習 6.4 次の行列が正則かどうかを判定せよ. また, もし正則行列ならばその逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$