6　行列のブロック分割／正則行列 の解答例

演習 6.1 (1) k に関する帰納法で示す. $k=1$ の場合は明らか. 以下, $k>1$ のとき, $k-1$ まで成立すると仮定して k の場合を示す. 仮定により

$$\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}^{k} &= \begin{pmatrix} aE_m & A \\ O & aE_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{k-1}E_m & (k-1)a^{k-2}A \\ O & a^{k-1}E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (aE_m)(a^{k-1}E_m)+AO & (aE_m)((k-1)a^{k-2}A)+A(a^{k-1}E_n) \\ O(a^{k-1}E_m)+(aE_m)O & O(((k-1)a^{k-2}A))+(aE_n)(a^{k-1}E_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^kE_m & ka^{k-1}A \\ O & a^kE_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって, k の場合も成り立つ.

(2) $\begin{pmatrix} 32 & 0 & 80 & 240 \\ 0 & 32 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

演習 6.2 $A^2=A$ かつ A が正則行列ならば $A=E$ となることを示せば良い. A が正則行列ならば逆行列 A^{-1} が存在するので, $A^2=A$ の両辺に左から (右からでもよい) A^{-1} をかけると,

$$(\text{左辺}) = A^{-1}A^2 = (A^{-1}A)A = EA = A, \quad (\text{右辺}) = A^{-1}A = E.$$

よって, $A=E$ を得る.

演習 6.3 (1) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

演習 6.4 (1) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c_{11}+c_{12}=1 \\ 7c_{11}+2c_{12}=0, \end{cases} \begin{cases} 3c_{21}+c_{22}=0 \\ 7c_{21}+2c_{22}=1. \end{cases}$

これは解 $c_{11}=-2$, $c_{12}=7$, $c_{21}=1$, $c_{22}=-3$ をもつ．そこで, $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ が実際逆行列になっているかどうかを確かめてみると,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから, 実際逆行列になっている．よって, 与えられた行列は, 逆行列 $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ をもち, 正則であることがわかる.

(2) 上記と同様に考えれば, 逆行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ をもち, 正則であることが分かる.

(3) $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11}+2c_{12}=1 \\ 2c_{11}+4c_{12}=0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{21}+2c_{22}=0 \\ 2c_{21}+4c_{22}=1. \end{cases}$

これは解をもたない (例えば, $c_{11}+2c_{12}=1$ ならば $2c_{11}+4c_{12}=2$ となるはずだから $2c_{11}+4c_{12}=0$ は満たさない)．よって $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ には逆行列は存在せず, 非正則である.

(4) 正則行列である．演習 6.3 (1) により,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 16 & -39 \\ 1 & -3 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(5) 正則行列である．$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と演習 6.3 (2) により,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$