5　行列の積・転置行列・ブロック分割 の解答例

演習 5.1 (1) -1　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -13 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 27 & 30 & 24 \\ 63 & 84 & 69 \\ 99 & 138 & 114 \end{pmatrix}$　　(5) $\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$

演習 5.2 ($\Rightarrow$) ${}^tA = A$ だから, 任意の n 次正方行列 X に対し, ${}^t(AX) = {}^tX{}^tA = ({}^tX)A$.

($\Leftarrow$) $X = E_n$ (単位行列) のとき, ${}^tE_n = E_n$ だから, ${}^tA = {}^t(AE_n) = ({}^tE_n)A = E_nA = A$. よって, A は対称行列である.

演習 5.3 A を任意の正方行列とする.

(可能性) $A_1 = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $A_2 = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおくと,

$$ {}^tA_1 = \frac{1}{2}({}^tA + A) = A_1, \quad {}^tA_2 = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -A_2 $$

だから, A_1 は対称行列, A_2 は交代行列である. そして $A = A_1 + A_2$ だから, 確かに A は対称行列と交代行列の和で表すことができる.

(一意性) ある対称行列 B_1 と交代行列 B_2 があって $A = B_1 + B_2$ なら $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ となることを示す. まず, $A_1 + A_2 = B_1 + B_2$ より,

$$ A_1 - B_1 = B_2 - A_2. $$

この式の左辺は対称行列, 右辺は交代行列であるが, そのような行列は零行列 O でしかあり得ない (X が対称行列かつ交代行列ならば $X = -X$ だから $X = O$). よって $A_1 - B_1 = B_2 - A_2 = O$, 従って $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ を得る.

演習 5.4 $\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$