4 行列の基本演算 (追加)

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし, K を成分とする行列・ベクトルを考える.

演習 4.6. (1) A, B を n 次の正方行列とすると, AB, BA も n 次の正方行列となる. このとき $AB = BA$ が成立するとは限らない. $AB \neq BA$ となるような例を挙げよ.

(2) 逆に $AB = BA$ が成立するような例を挙げよ.

(3) A を n 次正方行列とする. もしすべての n 次正方行列 X に対し $AX = XA$ が成り立つならば, ある $c \in K$ が存在して $A = cE_n$ となることを示せ. (ここで, E_n は n 次の単位行列を表す.)

(4) A を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{x}$ を n 項縦ベクトルとするとき, $A\boldsymbol{x}$ は m 項縦ベクトルとなる. $A \neq O$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ かつ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるような $A, \boldsymbol{x}$ の例を挙げよ.

(5) A を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を A の列ベクトルとする ($A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$). このとき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であることと, “任意の $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対し, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$” が成り立つことが同値であることを示せ.