4 行列の基本演算

今日は行列の基本演算について予習をしておきたいと思います. 最初に基礎事項をお話しするので, その後で時間の許す限り問題演習をしていきましょう.

説明用問題 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次を求めよ.

(1) $2A + 3B$ (2) $3A - 2B$ (3) ${}^tA$

説明用問題 2. 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

演習 4.1 次の等式が成り立つように x, y, z の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & z \end{pmatrix}$$

演習 4.2 (行列の積の結合法則) (1) A, B, C を 2×2 の正方行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

(2) A を 3×2 行列, B を 2×2 行列, C を 2×4 行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

(3) 一般に, A を $m \times n$ 行列, B を $n \times l$ 行列, C を $l \times r$ 行列とするとき, $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.

演習 4.3 (行列の分配法則) (1) A, B, C, D を 2×2 の正方行列とするとき, $A(B+C) = AB + AC$, $(B + C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

(2) A を 3×2 行列, B, C を 2×4 行列, D を 4×2 行列とするとき, $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

(3) 一般に, A を $m \times n$ 行列, B, C を $n \times l$ 行列, D を $l \times r$ 行列とするとき, $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)D = BD + CD$ が成立することを示せ.

演習 4.4 A, B を正方行列とする. 行列の結合法則・分配法則を使って, 次の式が成立することを示せ.

(1) $(AB)^2 = (A(BA))B$ (2) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

演習 4.5 A を 3 次の交代行列 (${}^tA = -A$ を満たす 3 次の正方行列) とする. 任意の奇数 $n \geq 0$ に対し, A^n は A のスカラー倍になることを示せ.