4　行列の基本演算 の解答例

演習 4.1 $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+6 & xy-2 \\ 5 & -y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6=2 \\ xy-2=-5 \\ -y-3=z. \end{cases}$

これを解いて, $x=-1$, $y=3$, $z=-6$.

演習 4.2 (1) と (2) は $\sum$ 記号のありがたみを実感してもらうために, あえて腕力を使う問題にしたものですが, 黒板でやるには不向きでしたね. ($\sum$ 記号を使わないことの不便さを実感してもらった, という意味では狙い通りでしたが.)

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
&(AB)C = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right\} = A(BC).
\end{aligned}
$$

(2) (略) $\cdots$ 要は $\sum$ 記号の便利さを理解すれば OK です.

(3) $A=(a_{ij})_{i,j}$, $B=(b_{ij})_{i,j}$, $C=(c_{ij})_{i,j}$ とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j}(c_{ij})_{i,j} = \left(\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj}\right)_{i,j} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{l} b_{ks}c_{sj}\right)\right)_{i,j} = (a_{ij})_{i,j}\left(\sum_{s=1}^{l} b_{is}c_{sj}\right)_{i,j} \\
&= A(BC).
\end{aligned}
$$

演習 4.3 (行列の分配法則) (1)(2) (略)

(3) $A=(a_{ij})_{i,j}$, $B=(b_{ij})_{i,j}$, $C=(c_{ij})_{i,j}$, $D=(d_{ij})_{i,j}$ とする.

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= (a_{ij})_{i,j}(b_{ij}+c_{ij})_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right)_{i,j} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)_{i,j} \\
&= AB+AC.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B+C)D &= (b_{ij}+c_{ij})_{i,j}(d_{ij})_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{l} (b_{ik}+c_{ik})d_{kj}\right)_{i,j} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{l} b_{ik}d_{kj} + \sum_{k=1}^{l} c_{ik}d_{kj}\right)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{l} b_{ik}d_{kj}\right)_{i,j} + \left(\sum_{k=1}^{l} c_{ik}d_{kj}\right)_{i,j} \\
&= BD+CD.
\end{aligned}$$

演習 4.4 (1) $(AB)^2=(AB)(AB)=((AB)A)B=(A(BA))B$.

(2) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$.

演習 4.5 A は 3 次の交代行列なので,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる. これに対し A^2, A^3 を具体的に計算してみると,

$$A^2=\begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & -a(a^2+c^2+b^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ a(a^2+b^2+c^2) & 0 & -c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & c(b^2+a^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)A$$

を得る. よって, とりあえず $n=1,3$ の場合は証明できた.

以下, $m=0,1,2,3,\ldots$ に対し,

$$A^{2m+1}=(-1)^m(a^2+b^2+c^2)^m A$$

となることを数学的帰納法で示す. $m=0,1$ の場合は既に示したので, 次に $m>1$ の場合を考えて, A^{2m-1} については成立したと仮定する. すると,

$$\begin{aligned} A^{2m+1}=A^{2m-1}A^2 &= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}AA^2=(-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}A^3 \\ &= (-1)^{m-1}(a^2+b^2+c^2)^{m-1}(-(a^2+b^2+c^2))A \\ &= (-1)^m(a^2+b^2+c^2)^m A \end{aligned}$$

となり, A^{2m+1} についても成立することが分かる. □

演習 4.6 (1) 例えば,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 例えば, $A=E_n$, $B=$ 任意の $n\times n$ 行列.

(3) $A=(a_{ij})_{i,j}$, $X=(x_{ij})_{i,j}$ とおくと, $AX=XA$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_{kj}=\sum_{k=1}^n x_{ik}a_{kj}$$

となる. ここで, 各 $r=1,\dots,n$ に対し, $X_r=(x_{kl})_{k,l}$ を

$$x_{kl}=\begin{cases} 1 & (k=r \text{ のとき}) \\ 0 & (k\neq r \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるように定めよう. すると, i,j,r を 1 から n までの任意の自然数とするとき, $AX_r=X_rA$ の (i,j) 成分は

$$a_{ir}=\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{kj} & (i=r \text{ のとき}) \\ 0 & (i\neq r \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. $i\neq r$ のとき $a_{ir}=0$ だから, これにより A が対角行列であることが分かる. そのことをふまえて上記の式の $i=r$ の場合を考えれば, 任意の $i,j=1,\dots,n$ について

$$a_{ii}=a_{jj}$$

が成立することが分かる. よって, $c=a_{11}=\cdots=a_{nn}$ とおけば, $A=cE_n$ である.

(4) 例えば,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5) 次のような簡単な言い換えにすぎない:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ が線形独立} \\
\Leftrightarrow\ & \text{“任意の } x_1, \ldots, x_n \in K \text{ に対し, } \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0\text{”} \\
\Leftrightarrow\ & \text{“任意の } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ に対し, } (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\text{”.} \\
\Leftrightarrow\ & \text{“任意の } \boldsymbol{x} \in K^n \text{ に対し, } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{”.}
\end{aligned}
$$