3　一般の数ベクトル

今日は, ベクトルの線形独立・線形従属について (特に裏面では, 定義に関して勘違いしやすいポイントについて) 演習を行っていきたいと思います. 以下で, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{C}$ は複素数全体を表すものとします. ここからは複素数はスカラー (定数) と考えるので, 扱いが前回などとは異なることに注意してください (前回などは平面ベクトルと対応させる考え方を強調しましたが, ここからの扱いではベクトルではなくあくまでスカラーと考えます).

演習 3.1 次で与えられる 3 項実ベクトル (空間ベクトル) の組が ($\mathbb{R}$ 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 3.2 次で与えられる 3 項複素ベクトルの組が ($\mathbb{C}$ 上で) 線形独立か線形従属かを調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+3\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とするとき, m 個の n 項数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in K^n$ について, 次の二つの条件を考えてみます:

(a) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立

(a') $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ のうちどの 2 つも線形独立

これらが異なる条件であることは, 例えば前々回の演習 1.2 で分かると思います. しかし, 今度はその否定命題として, 次の (b) と (b') とを考えてみます:

(b) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属

(b') $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ のうち, ある $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ $(i \neq j)$ について $\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j$ (c : 定数) と書ける

これらも異なる条件なのですが, (b) と (b') を混同する人が非常に多いので気を付けてください.

演習 3.3 (1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が線形従属であっても $\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2$ のスカラー倍にはならないことがある. そのような例を挙げよ.

(2) しかし, 次は成立する: $\boldsymbol{a}_1$ $\boldsymbol{a}_2$ が線形従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ のうちどちらかがどちらかのスカラー倍である. これを示せ.

(3) 上記で, (b') が実際に (a') の否定命題であることを示せ (つまり, (a') が成立しない $\Leftrightarrow$ (b') が成立する, を示せ).

(4) 3 項ベクトルの組で, 上記の (b) が成り立つが (b') は成り立たないような例を挙げよ (演習 3.1, 3.2 に該当するものがあればそれを選んでもよい).

演習 3.4 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. K 上の数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属ならば, ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して, $\boldsymbol{a}_i$ が $\boldsymbol{a}_i$ 以外の他のベクトルたちの線形結合で表せる (つまり, $\boldsymbol{a}_i$ が他の $m-1$ 個のベクトルたちで張られる空間に平行である) こと, すなわち, ある定数 $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in K$ が存在して,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

と表せることを示せ.