3 一般の数ベクトル の解答例

演習 3.1 と演習 3.2 は結果のみ書いておきます.

演習 3.1 (1) 線形独立 (2) 線形従属 (3) 線形従属 (4) 線形独立

演習 3.2 (1) 線形従属 (2) 線形従属 (3) 線形従属 (4) 線形独立

演習 3.3 (1) $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ のときにそうなる. 実際, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ となるので $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形従属であるが, $\boldsymbol{a}_2$ のスカラー倍はすべて $\mathbf{0}$ だから $\boldsymbol{a}_1$ と一致するはずがない.

(2) ($\Leftarrow$) $\boldsymbol{a}_1 = c\boldsymbol{a}_2$ ($c \in K$) のとき, $c_1 = 1$, $c_2 = -c$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$. また, $\boldsymbol{a}_2 = c\boldsymbol{a}_1$ ($c \in K$) のときは $c_1 = -c$, $c_2 = 1$ とすれば $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$. いずれにしても, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ なるスカラー c_1, c_2 について $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形従属である.
($\Rightarrow$) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線形従属のとき, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ なる $c_1, c_2 \in K$ が存在して $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ が成り立つ. $c_1 \neq 0$ のとき, $c = -c_2/c_1$ とすれば $\boldsymbol{a}_1 = c\boldsymbol{a}_2$ となる. $c_1 = 0$ (このとき $c_2 \neq 0$) のときは, $c = 0$ $(= -c_1/c_2)$ とすれば $\boldsymbol{a}_2 = c\boldsymbol{a}_1$ となる.

(3) (a') が成立しない $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ のうちある 2 つが線形従属, である. これがさらに (b') と同値であることが (2) により従う.

(4) 例えば, 演習 3.1 (2)(3), 演習 3.2 (1)(2)(3) はそのような例になっている.

演習 3.4 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形従属なので, ある定数の組 $b_1, \ldots, b_m \in K$ が存在して,

$$b_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}, \quad (b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0).$$

すると, $(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ だから, ある自然数 i $(1 \leq i \leq m)$ が存在して $b_i \neq 0$ となる. そこで, $c_j = -\dfrac{b_j}{b_i}$ $(j = 1, \ldots, m,\ j \neq i)$ とおけば, 上記の式により,

$$\boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{a}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m.$$