2 ベクトルの回転と複素数の積

平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を別の平面ベクトル $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移す変換があったとするとき, x' と y' が x, y の 1 次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

で表されるならば, この変換を 1 **次変換**という. また, 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をこの 1 次変換の**表現行列**と呼ぶ.

演習 2.1 平面ベクトルを角 θ だけ回転する変換を考える.

(1) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を角 θ だけ回転したベクトルを $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ とするとき, これらを θ を用いて表せ.

(2) 平面ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角 θ だけ回転したベクトルを $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とするとき,

$$\boldsymbol{x}' = x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2'$$

となることを図示せよ.

(3) 上記により, 角 θ の回転が 1 次変換であることが分かるので, その表現行列を求めよ.

(4) 角 θ_1 回転の後に角 θ_2 回転を行うことと, 角 $\theta_1 + \theta_2$ 回転を行うことが同じであることを用いて, 三角関数の加法定理を証明せよ.

複素数 z の偏角を θ とすると, z は

$$z = |z|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \quad (= |z|e^{\sqrt{-1}\theta})$$

と書ける (最後はオイラーの公式による). このような複素数の書き方を**極形式**と呼ぶ.

演習 2.2 (1) $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)$ とするとき, 三角関数の加法定理を用いて

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \quad (= |z_1||z_2|e^{\sqrt{-1}(\theta_1+\theta_2)})$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{-1}$ を極形式で表して,

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{100}, \quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{100}, \quad (\sqrt{3}-\sqrt{-1})^4$$

を求めよ.

(3) 3 乗して -1 になる複素数をすべて求めよ.

演習 2.3 c を一つの複素数とする. 平面ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し, これに対応する複素数 $z=x+y\sqrt{-1}$ と c との積 cz をとり, この cz に対応する平面ベクトルを $\boldsymbol{x}'$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に移す変換が 1 次変換であることを示せ.

(2) $c=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ とするとき, (1) の変換が演習 2.1 の角 θ 回転と一致することを確かめよ.