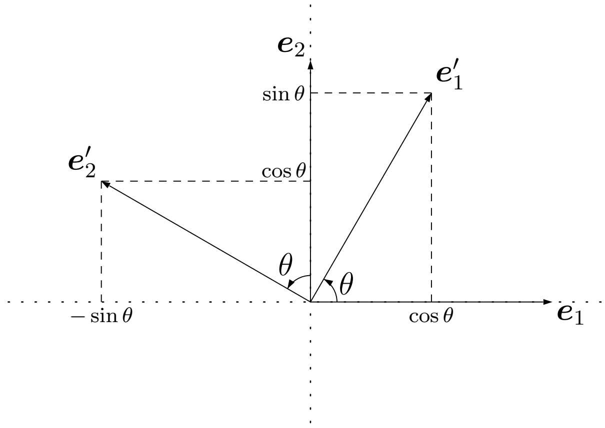
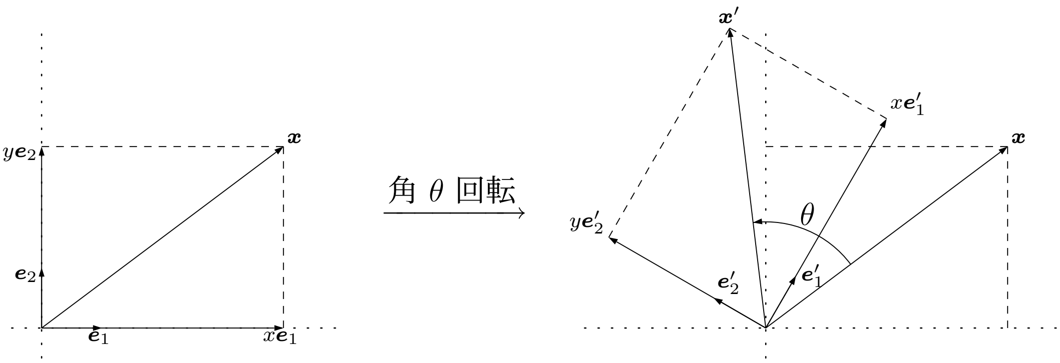
# 2　ベクトルの回転と複素数の積 の解答例

**演習 2.1** (1) $\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi/2) \\ \sin(\theta+\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. (下図参照)




(2) (上の図より縮尺を小さくしています)




$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ だから, 左の図のように, $\boldsymbol{x}$ は $x\boldsymbol{e}_1$ と $y\boldsymbol{e}_2$ によって作られる長方形の対角線にあたるベクトルである. この長方形全体を角 $\theta$ 回転したものは, $x\boldsymbol{e}_1'$ と $y\boldsymbol{e}_2'$ によって作られる長方形で, $\boldsymbol{x}'$ はその対角線にあたるベクトルであることが分かる. よって, $\boldsymbol{x}' = x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2'$.

(3) 上記の (1), (2) により,

$$\boldsymbol{x}' = x\boldsymbol{e}_1' + y\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

よって, 表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である.

(4) $\boldsymbol{e}_1$ を角 $\theta_1$ 回転した後に角 $\theta_2$ 回転すると,

$$\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

一方, $\boldsymbol{e}_1$ を角 $\theta_1+\theta_2$ 回転したものは,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

であり, 両者が一致するので

$$\begin{cases} \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{cases}$$

を得る.

**演習 2.2**

(1)
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \sqrt{-1}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\} \\ &= |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1+\theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2)\}. \end{aligned}$$

(2) まず, 3 つのベクトルを極形式で表すと

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} &= \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}, \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} &= \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \\ \sqrt{3}-\sqrt{-1} &= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \sqrt{-1}\sin\frac{11\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

である. 一般に, $z = |z|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ のとき, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \sqrt{-1}\sin(n\theta))$ となることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \cos(25\pi) + \sqrt{-1}\sin(25\pi) = -1, \\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{100} &= \cos\frac{200\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{200\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \\ (\sqrt{3}-\sqrt{-1})^4 &= 2^4\left(\cos\frac{22\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{22\pi}{3}\right) = 16\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = -8-8\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

(3) $z^3 = -1$ のとき, $|z|^3 = |z^3| = 1$ だから, $|z| = 1$ でなければならない. そこで, $z = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ とおくと,

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(3\theta) = -1 \\ \sin(3\theta) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 3\theta = \pi + 2n\pi \ ({}^\exists n : \text{整数}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3} \ ({}^\exists n : \text{整数}).$$

ここで, $n$ が何であろうと $z$ の値は $\theta = \pi, \pm\frac{\pi}{3}$ のいずれかの場合と一致するから, 3 乗して $-1$ となる複素数は $z = -1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{3}$ の 3 つがすべてである.

※ (3) は因数分解 $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$ を用いる方が普通だと思うのですが, 今回は回転がテーマなので上記のような解答例を書いておくことにしました.

**演習 2.3** (1) $c = a + b\sqrt{-1}$ とすると, $cz = (ax - by) + (bx + ay)\sqrt{-1}$ だから,

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

よって, この変換は $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を表現行列とする 1 次変換である.

(2) $c = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ のとき, (1) で求めた表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となり, 演習 2.1 (3) で求めた表現行列と一致する.