1 平面ベクトル の解答例

演習 1.1 (1) $c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2=5\\-3c_1+4c_2=3\end{cases}$
$\Leftrightarrow c_1=\frac{7}{5},\ \ c_2=\frac{9}{5}$.

(2) $c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2=-1\\-3c_1+4c_2=4\end{cases}$
$\Leftrightarrow c_1=-\frac{6}{5},\ \ c_2=\frac{1}{10}$.

(3) 解き方は上と同様で,

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}_1+\frac{3}{10}\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{10}\boldsymbol{a}_2.$$

演習 1.2 (1) まず, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表してみると, $\boldsymbol{e}_1=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{e}_2=-2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ と書ける. よって, 任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2=-\left(\frac{3}{2}x_1+2x_2\right)\boldsymbol{a}_1-\left(\frac{1}{2}x_1+x_2\right)\boldsymbol{a}_2.$$

(2) ($\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ について) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2c_1+4c_2=0\\c_1-3c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は線形独立.

($\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ について) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2c_1+c_2=0\\c_1+c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ は線形独立.

($\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ について) $c_1\boldsymbol{a}_2+c_2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}4c_1+c_2=0\\-3c_1+c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形独立.

(3) (1) より $\boldsymbol{a}_3=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2$ を満たす $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ が存在するはず. このとき $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形従属である. (具体的には $c_1=-\frac{7}{2}$, $c_2=-\frac{3}{2}$.)

演習 1.3 平面上の任意の点 (x, y) に対して, これに対応する (位置) ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をとる. すると,

(x, y) が求める直線上にある $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ が直交する $\Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow a_1 x + a_2 y = 0$

となるから, 求める直線の方程式は

$$a_1 x + a_2 y = 0$$

である.