2009 年度 代数学概論 II

アフィン群スキームと可換 Hopf 代数との対応

天野勝利

(2009 年 1 月 25 日〜2010 年 2 月 8 日分の講義ノート)

参考文献

W.C. Waterhouse, "Introduction to affine group schemes", Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

内容的には, この本の Chapter 1〜3 から抜粋した話となります. 予備知識として, category (圏) と functor (関手) について授業で少し補足しましたが, 本稿では既知として進めます (適当な入門書または数学辞典で言葉の定義を調べておくくらいで十分です).

2 affine group scheme

前回までと同様, k を基礎体とし, すべてその上で考える.

2.1 representable functor

以下, ${}_k\mathcal{A}$ を commutative k-algebra の圏, $\underline{\mathrm{Grp}}$ を群の圏, $\underline{\mathrm{Set}}$ を集合の圏とする. また, ${}_k\mathcal{A}$ から $\underline{\mathrm{Grp}}$ への関手 ${}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を group functor と呼び, $\underline{\mathrm{Set}}$ への関手 ${}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を set functor と呼ぶことにする.

affine group scheme とは, おおざっぱに言えば, 環で定義される (表される) group functor のことをいう. 例えば, 何か commutative な k-algebra R があるとき, それに対し一般線形群 $\mathbf{GL}_n(R)$ を考えることができるが, このとき個別の $\mathbf{GL}_n(R)$ という群ではなく, それらを生み出す $\mathbf{GL}_n$ というものを一つの数学的対象として考えたい. 具体的には, $\mathbf{GL}_n$ をひとつの group functor だと思うことにする:

$$\mathbf{GL}_n : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}, \quad R \mapsto \mathbf{GL}_n(R).$$

さらに $\mathbf{GL}_n$ は affine scheme の構造をもっている. つまり, ある座標環があって, それにより定義されている. そのようなものを考えたいわけだが, まずは「環で定義される (表される)」とはどういうことかをきちんと定義しておこう.

定義 2.1 A を commutative k-algebra, $\mathbf{F} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を set functor とする. $\mathbf{F}$ が次のような functor (と同型[1]) であるとき, $\mathbf{F}$ は A で represent されるという:

(i) object について, $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し $\mathbf{F}(R) = \mathrm{Alg}_k(A, R)$ を対応させる.
(ii) morphism については, algebra map $\varphi : R \to S$ に対し,

$$\mathbf{F}(\varphi) : \mathrm{Alg}_k(A, R) \to \mathrm{Alg}_k(A, S), \quad f \mapsto \varphi \circ f$$

を対応させる.

このような functor を **representable functor** という.

なお, 上記の $\mathbf{F}$ を affine scheme と同一視して $\mathbf{F} = \operatorname{Spec} A$ と書くことにする. またこのとき A を $\mathbf{F}$ の**座標環**と呼び, $A = k[\mathbf{F}]$ と書くこともある.

注意 2.2 次節で証明する米田の補題により, affine scheme の圏と representable functor の圏とが (${}_k\mathcal{A}$ の双対圏を介して) 圏同値になることがいえるので, 両者は同一視できます. この講義では時間の都合で affine scheme の話はしませんが, 背景にはそういう代数幾何的な対象があることを頭の片隅にでもおいておいてください. Waterhouse の本では, まずは representable functor という定義で話が進み, Chapter 4 で通常の代数群との関係が述べられ, Chapter 5 から $\operatorname{Spec} A$ の話が出てきます.

$\operatorname{Spec} A$ という記号は狭義には A の素イデアル全体がなす Zariski 位相空間を指しますが, 本稿では構造層も考えて affine scheme としての意味をもたせています. 両者を区別したいときは scheme のほうを $\operatorname{Sp} A$ と書くこともあります.

定義 2.3 representable な group functor を **affine group scheme** という.

例 2.4 (Hopf alebra から定まる group functor) H を commutative k-Hopf algebra とするとき, 前回の補題 1.37 (1) により, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Alg}_k(H, R)$ は $*$-積に関して群をなす. また, algebra map $\varphi : R \to S$ に対して $\mathrm{Alg}_k(H, R) \to \mathrm{Alg}_k(H, S)$, $f \mapsto \varphi \circ f$ は群準同型になっている ($\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$). よって, H で represent される functor は affine group scheme となる.

実は affine group scheme にはこの形のものしかない, ということを示すのが当面の目標である.

2.2 米田の補題

まず, functor 同士の morphism を定義する.

[1]同型の意味は次節で定義します.

定義 2.5 $\mathbf{E}, \mathbf{F} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を二つの set functor とする. $\Phi : E \to F$ が **functorial morphism**[2] であるとは, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して写像 $\Phi_R : \mathbf{E}(R) \to \mathbf{F}(R)$ が定められており, さらに, 任意の algebra map $\psi : R \to S$ に対し, 次の図式が可換になることをいう:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}(R) \arrow[r, "\mathbf{E}(\psi)"] \arrow[d, "\Phi_R"'] & \mathbf{E}(S) \arrow[d, "\Phi_S"] \\ \mathbf{F}(R) \arrow[r, "\mathbf{F}(\psi)"'] & \mathbf{F}(S). \end{tikzcd}$$

ここで, もしすべての Φ_R が全単射ならば Φ は **functorial isomorphism** であるといい, Φ_R^{-1} たちで定義される functorial morphism (これも functorial isomorphism となる) を Φ^{-1} と書く. またこのような functorial isomorphism が存在するとき $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ は同型であるといい, $\mathbf{E} \simeq \mathbf{F}$ と書く. 同型な functor は同一視してよい.

定理 2.6 (米田の補題) $A, B \in {}_k\mathcal{A}$, $\mathbf{E} = \operatorname{Spec} A$, $\mathbf{F} = \operatorname{Spec} B$ とする. このとき $\mathbf{E}$ から $\mathbf{F}$ への functorial morphism 全体と B から A への algebra map 全体 $\mathrm{Alg}_k(B, A)$ とが次のように bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{\mathbf{E} \to \mathbf{F} \quad \text{functorial morphism}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Alg}_k(B, A) \\ \Phi & \longrightarrow & \Phi_A(\mathrm{id}_A) \\ [\Phi_R : f \mapsto f \circ \varphi] & \longleftarrow & \varphi \end{array} .$$

[証明] ($\longleftarrow$) $\varphi \in \mathrm{Alg}_k(B, A)$ に対し,

$$\Phi_R : \mathbf{E}(R) = \mathrm{Alg}_k(A, R) \to \mathbf{F}(R) = \mathrm{Alg}_k(B, R), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

により $\Phi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ を定めれば, これは functorial morphism になる. 実際, 任意の algebra map $\psi : R \to S$ と $f \in \mathbf{E}(R)$ に対し,

$$f \stackrel{\mathbf{E}(\psi)}{\mapsto} \psi \circ f \stackrel{\Phi_S}{\mapsto} \psi \circ f \circ \varphi, \quad f \stackrel{\Phi_R}{\mapsto} f \circ \varphi \stackrel{\mathbf{F}(\psi)}{\mapsto} \psi \circ f \circ \varphi.$$

さらに, $\Phi_A(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A \circ \varphi = \varphi$ となるから, 行って戻ってくると元に戻る.

($\longrightarrow$) functorial morphism $\Phi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ に対し, $\varphi = \Phi_A(\mathrm{id}_A) \in \mathbf{F}(A) = \mathrm{Alg}_k(B, A)$ とおく. すると, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$, $f \in \mathbf{E}(R) = \mathrm{Alg}_k(A, R)$ について,

$$\Phi_R(f) = \Phi_R(f \circ \mathrm{id}_A) = f \circ \Phi_A(\mathrm{id}_A) = f \circ \varphi.$$

ここで, 二つ目の等式は次の可換図式における $\mathrm{id}_A \in \mathbf{E}(A)$ の行き先を考えれば分かる:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}(A) \arrow[r, "\mathbf{E}(f)"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathbf{E}(R) \arrow[d, "\Phi_R"] \\ \mathbf{F}(A) \arrow[r, "\mathbf{F}(f)"'] & \mathbf{F}(R). \end{tikzcd}$$

□

[2]Waterhouse の本では 'natural map' という語が用いられていますが, functorial morphism という用語の方が誤解が少ないと思うので, この講義ではこちらを用いることにします.

系 2.7 上記で Φ と φ が対応しているとき, Φ が functorial isomorphism であることと φ が algebra isomorphism であることは同値である. この場合 φ の逆写像は $\Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_B)$ により与えられる.

$\mathbf{E} = \operatorname{Spec} A$, $\mathbf{F} = \operatorname{Spec} B$ とするとき, 直積 functor $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ が自然に定義されるが, 次の対応により, これは $A \otimes B$ で represent されることが分かる:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Alg}_k(A \otimes B, R) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Alg}_k(A, R) \times \mathrm{Alg}_k(B, R) \\ [a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)] & \longleftarrow & (\varphi, \psi) \\ f & \longrightarrow & (f|_{A\otimes 1}, f|_{1 \otimes B}). \end{array}$$

補題 2.8 (よく使う対応関係) $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ をそれぞれ $A, B, C, D \in {}_k\mathcal{A}$ で represent される representable functor とする.

(1) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi} B$, $B \xleftarrow{\psi} C$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \xrightarrow{\Psi\circ\Phi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi\circ\psi} C$ が対応する.

(2) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{H}$ と $A \xleftarrow{\varphi} C$, $B \xleftarrow{\psi} D$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \times \mathbf{F} \xrightarrow{\Phi\times\Psi} \mathbf{G} \times \mathbf{H}$ と $A \otimes B \xleftarrow{\varphi\otimes\psi} C \otimes D$ が対応する.

(3) $\mathbf{E} \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ と $A \xleftarrow{m} A \otimes A$ が対応する.

(4) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{F}$, $\mathbf{E} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi} B$, $A \xleftarrow{\psi} C$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \xrightarrow{(\Phi,\Psi)} \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{m} A \otimes A \xleftarrow{\varphi\otimes\psi} B \otimes C$ が対応する.

証明は各自確認してみてください. (Φ, Ψ) という記号の意味などは容易に察することができると思うので, 説明は省略します. (なお, (1) まで言えた時点で注意 2.2 に書いた圏同値が証明されたことになります.)

2.3 可換 Hopf 代数との対応

すべての $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し単位元のみの群を対応させる group functor を $\{e\}$ と書く. k は $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$, $S(1) = 1$ により commutative Hopf algebra となるが, $\{e\}$ はこの k で represent される group functor に他ならない (従って affine group scheme である).

命題 2.9 set functor $\mathbf{G} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が group functor であるための必要十分条件は,

$$\begin{array}{rrl} \text{積} & \bullet : & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \\ \text{単位元} & \mathrm{unit} : & \{e\} \to \mathbf{G}, \\ \text{逆元} & \mathrm{inv} : & \mathbf{G} \to \mathbf{G} \end{array}$$

という三つの functorial morphism が存在して次の図式 (1)(2)(3) が可換になることである.

(1) 結合律:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}\times\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[r, "\bullet\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\bullet"'] & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[d, "\bullet"] \\ \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[r, "\bullet"] & \mathbf{G} \end{tikzcd}$$

(2) 単位律:

$$\begin{tikzcd} \{e\}\times\mathbf{G} \arrow[r, "\mathrm{unit}\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[d, "\bullet"] & \mathbf{G}\times\{e\} \arrow[l, "\mathrm{id}\times\mathrm{unit}"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & \mathbf{G} & \end{tikzcd}$$

(3) 逆元:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[dr, "\bullet"] & \\ \mathbf{G} \arrow[ur, "(\mathrm{id},\mathrm{inv})"] \arrow[r] \arrow[dr, "(\mathrm{inv},\mathrm{id})"'] & \{e\} \arrow[r, "\mathrm{unit}"] & \mathbf{G} \\ & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[ur, "\bullet"'] & \end{tikzcd}$$

[証明] $\mathbf{G}$ が group functor であるということをいいかえれば, (a) 任意の R に対し $\mathbf{G}(R)$ が群の構造をもち, さらに, (b) 任意の algebra map $\varphi : R \to S$ に対して $\mathbf{G}(\varphi) : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{G}(S)$ が群準同型となる, という二つの条件となる.

(必要性) $\mathbf{G}$ が group functor のとき, (a) により各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned} &\bullet_R : \mathbf{G}(R)\times\mathbf{G}(R) \to \mathbf{G}(R), \quad (g,h) \mapsto gh, \\ &\mathrm{unit}_R : \{e\} \to \mathbf{G}(R), \quad e \mapsto e, \\ &\mathrm{inv}_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{G}(R), \quad g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

という写像が得られる. さらに (b) は $\bullet$, inv, unit が functorial morphism となることを意味している (可換図式を書いて確かめよ). (1)(2)(3) の可換性は各 $\mathbf{G}(R)$ が群の公理を満たすことから明らかである.

(十分性) (1)(2)(3) の可換性により (a) が成立し, $\bullet$, inv, unit が functorial morphism であることから (b) が従う. $\square$

定理 2.10 $\mathbf{G} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を $H \in {}_k\mathcal{A}$ で represent される affine group scheme とする．命題 2.9 の $\bullet$, unit, inv に (米田の補題で) 対応する algebra map をそれぞれ

$$\begin{array}{ll} \Delta : H \to H \otimes H & \text{(comultiplication)} \\ \varepsilon : H \to k & \text{(counit)} \\ S : H \to H & \text{(antipode)} \end{array}$$

とすれば, これにより H は Hopf algebra の構造をもつ．さらに H から例 2.4 のように構成された group functor が $\mathbf{G}$ と一致する．

[証明] 命題 2.9 の (1)(2)(3) を algebra map の可換図式に書き直してみれば, (1)(2) は (H, Δ, ε) が余結合律, 余単位律を満たすことを意味していることが分かる．Δ, ε はもともと algebra map なので, H は bialgebra の構造をもつ．さらに (3) は S が antipode の条件を満たすことを意味しているので, H は Hopf algebra となる．また, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し $\mathbf{G}(R)$ の積は

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}(R) \times \mathbf{G}(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Alg}_k(H \otimes H, R) & \to & \mathbf{G}(R) \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & m \circ (\varphi \otimes \psi) & \mapsto & m \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta = \varphi * \psi \end{array}$$

となり, $*$-積と一致することがわかる． $\square$

2.4 群準同型と Hopf algebra map

今度は affine group scheme の準同型 (homomorphism) を考えてみよう．まず, group functor 同士の準同型を定義する．

定義 2.11 $\mathbf{G}, \mathbf{H} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を二つの group functor, $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ を functorial morphism とする．Φ が (group functor の) **homomorphism** であるとは, すべての $R \in {}_k\mathcal{A}$ について $\Phi_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{H}(R)$ が群準同型になることをいう．

ここで, $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ が affine group scheme である場合を考える．$\mathbf{G} = \mathrm{Spec}\, A$, $\mathbf{H} = \mathrm{Spec}\, B$ とし, functorial morphism $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ と algebra map $A \xleftarrow{\varphi} B$ が対応しているとする．Φ が homomorphism であるための条件を可換図式で表してみると,

$$\text{(積を保存)} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{H} \\ \bullet\uparrow & & \uparrow\bullet \\ \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow[\Phi \times \Phi]{} & \mathbf{H} \times \mathbf{H} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ A \otimes A & \xleftarrow[\varphi \otimes \varphi]{} & B \otimes B \end{array}$$

となるが, このときさらに次も可換になる:

(単位元を単位元に)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{H} \\ & \{e\} \arrow[ul, "\mathrm{unit}"] \arrow[u, "\mathrm{unit}"'] \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$
.

これらは φ が (algebra map かつ) coalgebra map であるための条件, すなわち φ が Hopf algebra map であるという条件と同値である. (ちなみに, 逆元が逆元にいくという条件を可換図式で表すと, φ が antipode と可換になるという条件と同値になる.)

定理 2.12 $\mathbf{G} = \operatorname{Spec} A$, $\mathbf{H} = \operatorname{Spec} B$ を二つの affine group scheme, $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ を functorial morphism とし, Φ に対応する algebra map を $\varphi : B \to A$ とする. このとき Φ が homomorphism であることと φ が Hopf algebra map であることが同値である.

2.5 closed subgroup scheme と Hopf ideal

$\mathbf{G}$ を affine group scheme とするとき, $\mathbf{G}$ の closed subscheme のうち subgroup になっているものを **closed subgroup scheme** と呼びたい. この授業では affine scheme の話をあまりしていないので 'closed' という語にも 'subscheme' という語にもピンとこないかもしれないが, とりあえずここでは, closed subscheme と座標環のイデアルが 1:1 に対応していることを踏まえておけば十分である:

$$\begin{array}{rcl} \{\mathbf{G} \supset \mathbf{G}' \ \ \text{closed subscheme}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{k[\mathbf{G}] \supset I \ \ \text{ideal}\} \\ \mathbf{G}' & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(k[\mathbf{G}] \twoheadrightarrow k[\mathbf{G}']) \\ \operatorname{Spec}(k[\mathbf{G}]/I) & \longleftarrow & I \end{array} .$$

この対応において $\mathbf{G}'$ が subgroup になるというのは, すべての $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して $\mathbf{G}'(R)$ が $\mathbf{G}(R)$ の部分群になってることをいうわけだが, それを functorial morphism の可換図式で表したい. $A = k[\mathbf{G}]$ とおき, I を $\mathbf{G}'$ に対応する A の ideal とする. $\mathbf{G}'$ が $\mathbf{G}$ の subgroup になるには

(a) 積で閉じている,
(b) 単位元を含む,
(c) 逆元をとる操作で閉じている,

という三つの条件を満たせばよい. まず (a) はどういう意味かというと, ある functorial morphism $\bullet' : \mathbf{G}' \times \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} & & \mathbf{G}' \arrow[ll, "\text{inclusion}"'] \\ \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[u, "\bullet"] & & \mathbf{G}' \times \mathbf{G}'. \arrow[ll, "\text{inclusion}"] \arrow[u, "\bullet'"'] \end{tikzcd}$$

これを algebra の言葉で表すと, ある algebra map $\Delta' : A/I \to A/I \otimes A/I$ が存在して

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & & & {\scriptstyle \Delta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta'} & & \\ 0 & \longrightarrow & I \otimes A + A \otimes I & \longrightarrow & A \otimes A & \longrightarrow & A/I \otimes A/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

が可換になること, となる. ここで, 左側に kernel 部分を付け加えたが, この図式をよく見れば (a) の条件は

(a') $\Delta(I) \subset I \otimes A + A \otimes I$

という I に関する条件と同値になることが分かるであろう. 次に (b) はどういう意味かというと, ある functorial morphism $\mathrm{unit}' : \{e\} \to \mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{G}' \\ {\scriptstyle \mathrm{unit}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{unit}'} \\ \{e\} & = \!= & \{e\}. \end{array}$$

これを algebra の言葉で表すと, ある algebra map $\varepsilon' : A/I \to k$ が存在して

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & & & {\scriptstyle \varepsilon}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & = \!= & k & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

が可換になること, となる. 前と同様, これを見れば (b) は

(b') $\varepsilon(I) = 0$

という条件と同値になることが分かる. (c) は, ある functorial morphism $\mathrm{inv}' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{G}' \\ {\scriptstyle \mathrm{inv}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{inv}'} \\ \mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{G}'. \end{array}$$

これを algebra の言葉で表すと, ある algebra map $S' : A/I \to A/I$ が存在して

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & & & {\scriptstyle S}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S'} & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

が可換になること, となる. これを見れば (c) は

(c') $S(I) \subset I$

という条件と同値になることが分かる．(a')(b')(c') は I が A の Hopf ideal になるための条件であったから, 結局 closed subgroup scheme とは Hopf ideal に対応する closed subscheme のことであることが分かった.

さて, B を別の commutative Hopf algebra とし, $\mathbf{H} = \operatorname{Spec} B$ とする．また $\Phi : \mathbf{H} \to \mathbf{G}$ を homomorphism とし, これに対応する Hopf algebra map を $\varphi : A \to B$ とする．ここで φ が全射であったとすると, B は $A/\operatorname{Ker}\varphi$ と同型な Hopf algebra となる．すなわち $\mathbf{H}$ は $\operatorname{Ker}\varphi$ に対応する $\mathbf{G}$ の closed subgroup scheme と同型な affine group scheme となる．この意味で, 全射 Hopf algebra map に対応する homomorphism のことを **closed embedding** と呼ぶ. ($\Phi : \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$ などと書いたりする.)

例えば unit : $\{e\} \to \mathbf{G}$ は最も基本的な closed embedding である．これに対応する Hopf ideal を $A^+ = \operatorname{Ker}\varepsilon$ と書き, A の **augmentation ideal** という.

2.6 正規部分群と剰余群

定義 2.13 (1) $\mathbf{G}$ を affine group scheme, $\mathbf{N}$ を $\mathbf{G}$ の closed subgroup scheme とする．このとき $\mathbf{N}$ が **normal** であるとは, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ について $\mathbf{N}(R)$ が $\mathbf{G}(R)$ の正規部分群になっていることをいう.

(2) A を Hopf algebra, I を A の Hopf ideal とする．このとき I が **normal Hopf ideal** であるとは, すべての $a \in I$ に対し

$$\sum a_1 S(a_3) \otimes a_2 \in A \otimes I$$

が成り立つことをいう.

(2) の定義がどこから出てきたのかは, 次の定理の証明を見れば分かる.

定理 2.14 $\mathbf{G}$ を $A \in {}_k\mathcal{A}$ で represent される affine group scheme, $\mathbf{N}$ を $\mathbf{G}$ の closed subgroup scheme とし, $\mathbf{N}$ に対応する A の Hopf ideal を I とする．このとき, $\mathbf{N}$ が normal であるための必要十分条件は I が normal Hopf ideal であることである.

[証明] $\Phi : \mathbf{G} \times \mathbf{N} \to \mathbf{G}$ という functorial morphism を $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ となるように定めたい．具体的には Φ を次のように構成する:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbf{G} \times \mathbf{N} \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})\times\mathrm{id}} \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{N} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{tw}} \mathbf{G} \times \mathbf{N} \times \mathbf{G} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times\mathrm{inv}} \mathbf{G} \times \mathbf{N} \times \mathbf{G} \\ \hookrightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \xrightarrow{\bullet\ 2回} \mathbf{G}.\end{aligned}$$

これに対応する algebra map を $\varphi : A \to A \otimes A/I$ とすると, φ は

$$\begin{aligned}\varphi : A \xrightarrow{\Delta\ 2回} A \otimes A \otimes A \twoheadrightarrow A \otimes A/I \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes S} A \otimes A/I \otimes A \\ \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{tw}} A \otimes A \otimes A/I \xrightarrow{m\otimes\mathrm{id}} A \otimes A/I\end{aligned}$$

となる．すなわち $a \in A$ に対し,

$$\varphi(a) = \sum a_1 S(a_3) \otimes \bar{a}_2.$$

さて, $\mathbf{N}$ が normal ということは Φ が $\mathbf{N}$ を経由するということと同値である．すなわち, ある functorial morphism $\Phi' : \mathbf{G} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ があって, 次の図式が可換になることである:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{N} \\ {\scriptstyle \Phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi'} \\ \mathbf{G} \times \mathbf{N} & = & \mathbf{G} \times \mathbf{N}. \end{array}$$

これを algebra におきかえると, ある algebra map $\varphi' : A/I \to A \otimes A/I$ があって

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \ \text{(exact)} \\ & & & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \otimes A/I & = & A \otimes A/I & \longrightarrow & 0 \ \text{(exact)} \end{array}$$

が可換になること, となる．これをよく見れば, $\varphi(I) = 0$ となること, すなわち任意の $a \in I$ について

$$\varphi(a) = \sum a_1 S(a_3) \otimes \bar{a}_2 = 0$$

となることと同値である．上の式をさらに書きなおせば

$$\sum a_1 S(a_3) \otimes a_2 \in A \otimes I$$

となるから, これは結局 I が normal Hopf ideal になることと同値になる． □

例 2.15 (homomorphism の kernel) $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ を affine group scheme, $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ を homomorphism とするとき, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して $\operatorname{Ker}\Phi_R$ を対応させる group functor を $\operatorname{Ker}\Phi$ と書く．ここで $A = k[\mathbf{G}]$, $B = k[\mathbf{H}]$ とし, $\varphi : B \to A$ を Φ に対応する Hopf algebra map とする．$\varphi(B)$ は A の Hopf subalgebra になるが, その augmentation ideal $\varphi(B)^+$ で生成される A の ideal $A\varphi(B)^+$ は Hopf ideal となる．このとき, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ について

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker}\Phi_R = \{f \in \mathbf{G}(R) \mid \Phi_R(f) = f \circ \varphi = u\varepsilon\} & \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} & \operatorname{Alg}_k(A/A\varphi(B)^+, R) \\ f & \longrightarrow & [\bar{a} \mapsto f(a)] \\ (A \twoheadrightarrow A/A\varphi(B)^+ \xrightarrow{g} R) & \longleftarrow & g \end{array}$$

という群同型が成立する ($f \in \operatorname{Ker}\Phi_R$ なら $[\bar{a} \mapsto f(a)]$ が well-defined であること, それから, 任意の $b \in B$ に対し, $\varphi(b) - \varepsilon(b)1 \in \varphi(B)^+$ となることに注意)．これにより $\operatorname{Ker}\Phi$ が $A\varphi(B)^+$ に対応する $\mathbf{G}$ の closed normal subgroup scheme であることが分かる．

affine group scheme の homorphism のうち, 単射 Hopf algebra map に対応するものを **quotient map** と呼ぶ. (圏論的にいうと, quotient map は affine group scheme の圏における epi-morphism にあたる. また, closed embedding が monic-morphism にあたる.) $\mathbf{G} = \operatorname{Spec} H$ を affine group scheme とすると, $\mathbf{G}$ からの quotient map は H の Hopf subalgebra に対応する. $H \supset H'$ を Hopf subalgebra, $\Phi : \mathbf{G} \to \operatorname{Spec} H'$ を対応する quotient map とするとき, 上記の例により $H(H')^+$ は $\operatorname{Ker}\Phi$ に対応する H の normal Hopf ideal となる. 実は, 逆に normal Hopf ideal $I \subset H$ が与えられた時に $I = H(H')^+$ を満たす Hopf subalgebra H' が一意的に存在することが知られている:

定理 2.16 H を commutative k-Hopf algebra とする. H の Hopf subalgebra と normal Hopf ideal とは次のように bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{H \supset H' \ \ \text{Hopf subalgebra}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \{H \supset I \ \ \text{normal Hopf ideal}\} \\ H' & \longrightarrow & H(H')^+ \\ H^{\mathrm{co}\, H/I} & \longleftarrow & I \end{array}.$$

ここで, $H^{\mathrm{co}\, H/I}$ は H の中の右 H/I-coinvariant 全体の集合という意味で, 次のように定義される:

$$H^{\mathrm{co}\, H/I} := \{h \in H \mid \Delta(h) - h \otimes 1 \in H \otimes I\}.$$

[参考] 証明は竹内先生の論文

M. Takeuchi, "A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras", Manuscripta Math. 7 (1972), 251–270,

または Waterhouse の本の Chapter 16 を参照. □

定義 2.17 (quotient group scheme) $\mathbf{G}$ を affine group scheme, $\mathbf{N}$ を $\mathbf{G}$ の closed normal subgroup scheme とすると, 上記の定理は quotient map $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ で $\mathbf{N} = \operatorname{Ker}\Phi$ となるようなものが (同型を除き) 一意的に存在することを意味している. このとき $\mathbf{H}$ を $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ と書き, $\mathbf{G}$ の $\mathbf{N}$ による **quotient** と呼ぶ.

準同型定理により, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し, Φ_R による $\mathbf{G}(R)$ の像は $\mathbf{G}(R)/\mathbf{N}(R)$ と同型になる. しかし $\mathbf{G}(R)/\mathbf{N}(R)$ と $(\mathbf{G}/\mathbf{N})(R)$ は同型にならないこともあるので注意が必要である (例えば下記の例 2.21 を参照). $\mathbf{G}$ と $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ が algebraic matrix group に由来する場合[3], 一般には $\mathbf{G}(k)/\mathbf{N}(k)$ が $(\mathbf{G}/\mathbf{N})(k)$ の dense な部分群として入っており, もし k が代数閉体ならば両者は一致する, という関係になる.

[3]「$\mathbf{G}$ が algebraic matrix group に由来する」とは, 一言でいえば, $\mathbf{G}$ の座標環が有限生成であり, かつ $\mathbf{G}(k)$ の座標環と一致すること ($k[\mathbf{G}] = k[\mathbf{G}(k)]$) をいう. 詳しくは Waterhouse の本の Chapter 4 を参照してください.

2.7 具体例

例 2.18 ($\mathbf{GL}_n$ と $\mathbf{SL}_n$) 第一部「Hopf 代数とは」の例 1.24 で, n^2 変数の多項式環 $B = k[X_{ij}]$ が

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} X_{is} \otimes X_{sj}, \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

によって bialgebra となることをみた. $X = (X_{ij})_{i,j}$ とすれば, 上の式は

$$\Delta(X) = (X \otimes 1)(1 \otimes X), \quad \varepsilon(X) = E_n \text{ (単位行列)}$$

と書くこともできる. (ただし, $\Delta(X)$ や $\varepsilon(X)$ は X の各成分に Δ, ε を施した行列, $(X \otimes 1) = (X_{ij} \otimes 1)_{i,j}$, $(1 \otimes X) = (1 \otimes X_{ij})_{i,j} \in M_n(B \otimes B)$.) この二式の両辺の行列式を考えれば

$$\Delta(\det X) = (\det X) \otimes (\det X), \quad \varepsilon(\det X) = 1$$

を得る.

ここで, B を $\det X$ により局所化した環 $H = k[X, 1/\det X]$ を考える. 上記により Δ, ε は $\det X$ を $H \otimes H$, k の可逆元に送るから, それぞれ algebra map $\Delta : H \to H \otimes H$, $\varepsilon : H \to k$ として一意的に拡張できる. さらに $S : H \to H$ を

$$S(X) = X^{-1} \quad (\Rightarrow S(\det X) = 1/\det X)$$

となる (anti-)algebra map として定義すれば, これにより H は Hopf algebra となる (注意 1.23, 補題 1.33 を使って各自確認してみてください). 冒頭に書いた $\mathbf{GL}_n$ は, この H により represent される affine group scheme である. 実際, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し群同型

$$\mathrm{Alg}_k(H, R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_n(R), \quad \varphi \mapsto \varphi(X)$$

が成立する.

次に, $\det X - 1$ で生成される H のイデアル $I = \langle \det X - 1 \rangle$ を考えると, これは (normal) Hopf ideal となる. この I に対応する $\mathbf{GL}_n$ の closed subgroup scheme は特殊線形群

$$\mathbf{SL}_n : R \mapsto \mathbf{SL}_n(R) = \{g \in \mathbf{GL}_n(R) \mid \det g = 1\}$$

となる.

例 2.19 (multiplicative group) $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し R の可逆元全体からなる群を対応させる group functor を $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ と書き, multiplicative group (scheme) という:

$$\mathbf{G}_\mathrm{m} : R \mapsto R^\times.$$

これは $\mathbf{GL}_1$ と同型な affine group scheme である．座標環は, 1 変数の Laurent 多項式環 $k[x,x^{-1}]$ に

$$\Delta(x)=x\otimes x,\quad \varepsilon(x)=1,\quad S(x)=x^{-1}$$

により Hopf algebra の構造を入れたものである．

先程の $\mathbf{GL}_n$ の $\mathbf{SL}_n$ による quotient $\mathbf{GL}_n/\mathbf{SL}_n$ を考えると, これは $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ になる．定理 2.16 の対応でいうと, $H=k[\mathbf{GL}_n]\supset I=\langle\det X-1\rangle$ とするとき, I に対応する H の Hopf subalgebra は

$$H^{\mathrm{co}\,H/I}=k[\det X,(\det X)^{-1}]\simeq k[x,x^{-1}]$$

となっている．要するに quotient map $\det:\mathbf{GL}_n\to\mathbf{G}_\mathrm{m}$ の kernel が $\mathbf{SL}_n$ となっているということだが, これをさらにいいかえれば,

$$\{e\}\to\mathbf{SL}_n\to\mathbf{GL}_n\xrightarrow{\det}\mathbf{G}_\mathrm{m}\to\{e\}$$

が affine group scheme の完全列になっている, という言い方もできる．これを Hopf algebra map に置き換えたものを

$$k[\mathbf{G}_\mathrm{m}]\rightarrowtail k[\mathbf{GL}_n]\twoheadrightarrow k[\mathbf{SL}_n]$$

という記号で書くこともある．

例 2.20 (additive group) $R\in{}_k\mathcal{A}$ に対し R が加法に関してなす群を対応させる group functor を $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ と書き, additive group (scheme) という:

$$\mathbf{G}_\mathrm{a}:R\mapsto(R,+).$$

これは 1 変数多項式環 $k[Y]$ に Hopf algebra 構造を

$$\Delta(Y)=Y\otimes 1+1\otimes Y,\quad \varepsilon(Y)=0,\quad S(Y)=-Y$$

で入れたものにより represent される affine group scheme である．

例 2.21 (1 の n 乗根全体) $R\in{}_k\mathcal{A}$ に対し, R における 1 の n 乗根全体が乗法に関してなす群を対応させる group functor を

$$\boldsymbol{\mu}_n:R\mapsto\{a\in R\mid a^n=1\}$$

と書く．これは $\langle x^n-1\rangle\subset k[x,x^{-1}]$ に対応する $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ の closed subgroup scheme である．

$\Phi:\mathbf{G}_\mathrm{m}\to\mathbf{G}_\mathrm{m}$ を $a\mapsto a^n$ で与えられる homomorphism とすると, これは Hopf subalgebra $k[x^n,x^{-n}]\subset k[x,x^{-1}]$ に対応する quotient map であり, $\operatorname{Ker}\Phi=\boldsymbol{\mu}_n$ となる．よって, $\mathbf{G}_\mathrm{m}/\boldsymbol{\mu}_n=\mathbf{G}_\mathrm{m}$ である．このとき $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)/\boldsymbol{\mu}_n(k)$ は $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)$ の dense な部分群 $\{a\in k^\times\mid {}^\exists b\in k^\times \text{ s.t. } b^n=a\}$ と同型になるわけだが, 一般にはこれは $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)$ 自身とは一致しない．ただし, もし k が代数閉体であったなら $\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)/\boldsymbol{\mu}_n(k)\simeq\mathbf{G}_\mathrm{m}(k)$ となる．

例 2.22 ($\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$) k の標数が $p > 0$ であったとする. このとき $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し R の元のうち p^n して 0 になるもの全体が加法に関してなす群を対応させる group functor を $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$ と書く:

$$\boldsymbol{\alpha}_{p^n} : R \mapsto \{a \in R \mid a^{p^n} = 0\}.$$

これは $\langle Y^{p^n} \rangle \subset k[Y]$ に対応する $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ の closed subgroup scheme である.

$\Phi : \mathbf{G}_\mathrm{a} \to \mathbf{G}_\mathrm{a}$ を $a \mapsto a^{p^n}$ で与えられる homomorphism とすると, これは Hopf subalgebra $k[Y^{p^n}] \subset k[Y]$ に対応する quotient map であり, $\operatorname{Ker}\Phi = \boldsymbol{\alpha}_{p^n}$ となる. よって, $\mathbf{G}_\mathrm{a}/\boldsymbol{\alpha}_{p^n} = \mathbf{G}_\mathrm{a}$ である. もし R が整域ならば $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}(R) = \{0\}$ となってしまうので, $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$ には通常の代数群としての実体はないが, affine group scheme の例としては重要である.

2.8 grouplike 元と primitive 元, multiplicative/additive character

$\mathbf{G}_\mathrm{m}$ と $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ の話が出たついでに, Hopf 代数では重要な grouplike 元と primitive 元について少し説明し, それと affine group scheme の character との関係について補足する.

定義 2.23 B を bialgebra とする.

(1) $g \in B$ が **grouplike** であるとは, $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ を満たすことをいう.

(2) $h \in B$ が **primitive** であるとは, $\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h$, $\varepsilon(h) = 0$ を満たすことをいう.

B の grouplike 元全体の集合を $G(B)$, primitive 元全体の集合を $P(B)$ と書く. $G(B)$ は B の積に関して monoid の構造をもつ. 特に, H が Hopf algebra のとき, $g \in G(H)$ に関して $gS(g) = 1 = S(g)g$ でなければならないから $S(g) = g^{-1}$ であり, $G(H)$ は群になる. また, B をブラケット積 $[x, y] = xy - yx$ により Lie 環とみなすとき, $P(B)$ は B の部分 Lie 環となる.

定義 2.24 $\mathbf{G}$ を affine group scheme とする.

(1) $\mathbf{G}$ から $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ への homomorphism を $\mathbf{G}$ の **(multiplicative) character** という.

(2) $\mathbf{G}$ から $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ への homomorphism を $\mathbf{G}$ の **additive character** という.

$\mathbf{G}$ の character $\mathbf{G} \to \mathbf{G}_\mathrm{m}$ は Hopf algebra map $k[x, x^{-1}] \to k[\mathbf{G}]$ に対応するが, それはさらに x の行先となる $k[\mathbf{G}]$ の grouplike 元に対応する. 従って, $\mathbf{G}$ の character と $k[\mathbf{G}]$ の grouplike 元とは 1:1 に対応する. 同様に, $\mathbf{G}$ の additive character と $k[\mathbf{G}]$ の primitive 元とが 1:1 に対応する. これらのことが $\mathbf{G}$ の構造を調べる上で役に立つことがある (三角化可能性とか).

2.9 linear representation (線形表現) と comodule

V を k-ベクトル空間とする．G を群とするとき, G の V 上の線形表現とは G から $GL(V)=\{V \xrightarrow{\sim} V$ 線形同型$\}$ への群準同型にほかならない．これと同様に, affine group scheme の V 上の線形表現を定義する．

まず, $\mathbf{GL}_V$ という group functor を

$$\mathbf{GL}_V : R \mapsto \{V\otimes R \xrightarrow{\sim} V\otimes R \ \text{右 } R\text{-linear isomorphism}\}$$

により定める．射の対応は, algebra map $\varphi : R \to S$ に対し

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{GL}_V(\varphi) : \mathbf{GL}_V(R) & \to & \mathbf{GL}_V(S) \\ h & \mapsto & [v\otimes s \mapsto (\mathrm{id}\otimes\varphi)(h(v\otimes 1))s] \end{array}$$

とする．こう書いただけでは well-defined かどうか心配になるかもしれないが, 写像の合成で書くと,

$$\mathbf{GL}_V(\varphi)(h) : V\otimes S \xrightarrow{\sim} V\otimes R\otimes_R {}_\varphi S \xrightarrow[h\otimes \mathrm{id}_S]{\sim} V\otimes R\otimes_R {}_\varphi S \xrightarrow{\sim} V\otimes S$$

(${}_\varphi S$ は φ を介して S を R-module とみなしたもの) というものだから, $\mathbf{GL}_V(\varphi)(h)$ はちゃんと $\mathbf{GL}_V(S)$ に入っている．ここで, $h\in\mathbf{GL}_V(R)$ は V への制限 $h|_V : V\to V\otimes R$, $v\mapsto h(v\otimes 1)$ により完全に定まっており, 単にこれを右 R-linear になるように拡張したものにすぎないことに注意しておこう．$\mathbf{GL}_V(\varphi)(h)$ も $(\mathrm{id}\otimes\varphi)\circ h|_V : V\to V\otimes S$ を右 S-linear になるように拡張したものにすぎない．

定義 2.25 $\mathbf{G}$ を affine group scheme, V を k-ベクトル空間とするとき, $\mathbf{G}$ から $\mathbf{GL}_V$ への homomorphism を $\mathbf{G}$ の V 上の **linear representation** と呼ぶ．

定理 2.26 $\mathbf{G}$ を affine group scheme, $A=k[\mathbf{G}]$ とする．V を k-ベクトル空間とするとき, $\mathbf{G}$ の V 上の linear representation と V の右 A-comodule 構造とは次のように bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{\Phi : \mathbf{G}\to\mathbf{GL}_V \text{ linear rep.}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\rho : V\to V\otimes A \ \text{ 右 } A\text{-comodule 構造}\} \\ \Phi & \longrightarrow & \Phi_A(\mathrm{id}_A)|_V \\ [\Phi_R : g\mapsto [v\otimes r\mapsto (\mathrm{id}\otimes g)(\rho(v))r]] & \longleftarrow & \rho \end{array}$$

[証明] ($\longrightarrow$) $\Phi : \mathbf{G}\to\mathbf{GL}_V$ を homomorphism とする．$\rho' = \Phi_A(\mathrm{id}_A) \in \mathbf{GL}_V(A)$ とし, これを V に制限したものを $\rho = \rho'|_V : V\to V\otimes A$ とおく．

Φ は functorial morphism なので, 任意の $R\in {}_k\mathcal{A}$, $g\in\mathbf{G}(R)=\mathrm{Alg}_k(A,R)$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(A) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "\mathbf{G}(g)"'] & \mathbf{GL}_V(A) \arrow[d, "\mathbf{GL}_V(g)"] \\ \mathbf{G}(R) \arrow[r, "\Phi_R"'] & \mathbf{GL}_V(R) \end{tikzcd}$$

は可換である. この図式における $\mathrm{id}_A \in \mathbf{G}(A)$ の行先を考えれば

$$\Phi_R(g) = \mathbf{GL}_V(g)(\Phi_A(\mathrm{id}_A)) = \mathbf{GL}_V(g)(\rho')$$

を得る. 故に, $\Phi_R(g)$ は $(\mathrm{id} \otimes g) \circ \rho : V \to V \otimes R$ を右 R-linear になるよう拡張したものに他ならない. すなわち Φ_R は

$$\Phi_R : g \mapsto [v \otimes r \mapsto (\mathrm{id} \otimes g)(\rho(v))r]$$

という写像になっている.

あとは ρ が V に右 A-comodule の構造を与えることを示せばよい. まず, $\varepsilon \in \mathbf{G}(k)$ は単位元なので, $\Phi_k(\varepsilon)$ は $\mathbf{GL}_V(k) = GL(V)$ の単位元, つまり V の恒等写像でなければならない. 一方, 先程の説明より $\Phi_k(\varepsilon)$ は $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \rho$ と同じ写像だから,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & & V \otimes A \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ & V \otimes k & \end{tikzcd}$$

の可換性が分かる.

任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ と $g, h \in \mathbf{G}(R)$ に対し, 積 $gh = m \circ (g \otimes h) \circ \Delta$ を考えると, $\Phi_R(gh) = \mathbf{GL}_V(gh)(\rho')$ は $(\mathrm{id} \otimes gh) \circ \rho$ を右 R-linear になるように拡張したものであるから, V に制限すると

$$\Phi_R(gh)|_V : V \xrightarrow{\rho} V \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} V \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g \otimes h} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V \otimes R \tag{2.1}$$

となる. 一方, $\Phi_R(g)$, $\Phi_R(h)$ はそれぞれ $(\mathrm{id} \otimes g) \circ \rho$, $(\mathrm{id} \otimes h) \circ \rho$ を右 R-linear になるように拡張したものだから, $\Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$ を V に制限すると

$$\begin{aligned} (\Phi_R(g) \circ \Phi_R(h))|_V : V &\xrightarrow{\rho} V \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes h} V \otimes R \xrightarrow{\rho\otimes\mathrm{id}} V \otimes A \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g \otimes \mathrm{id}} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V \otimes R \\ = \quad V &\xrightarrow{\rho} V \otimes A \xrightarrow{\rho\otimes\mathrm{id}} V \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g \otimes h} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V \otimes R \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる. Φ_R は群準同型だから $\Phi_R(gh) = \Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$, 従って, (2.1) と (2.2) とは一致していなければならない. ここで, $R = A \otimes A$, $g : a \mapsto a \otimes 1$, $h : b \mapsto 1 \otimes b$ とすれば $V \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g \otimes h} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V \otimes R$ の部分は恒等写像になってしまうので,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V \otimes A \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \\ V \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & V \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

の可換性を得る. 以上より, ρ が V の右 A-comodule 構造を与えることがいえた.

($\longleftarrow$) $\rho : V \to V \otimes A$ を右 A-comodule 構造とする．この ρ を右 A-linear になるように拡張したものを $\rho' : V \otimes A \to V \otimes A$ とすると, これは isomorphism になる (逆写像は $v \otimes a \mapsto \sum v_0 \otimes S(v_1)a$) ので, $\rho' \in \mathbf{GL}_V(A)$ である．すると, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し

$$\Phi_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{GL}_V(R), \quad g \mapsto \mathbf{GL}_V(g)(\rho')$$

とすることにより $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ という functorial morphism が得られる．さて, ρ は comodule 構造だから $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$ で, 従って, 任意の $g, h \in \mathbf{G}(R)$ に対して上記の (2.1) と (2.2) とは一致する．よって, ($\mathbf{GL}_V(R)$ の元はその V への制限によって完全に定まるのであったから) $\Phi_R(gh) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$ を得る．従って Φ は homomorphism である． □

例 2.27 上の定理で $V = A$ とするとき, $\Delta : A \to A \otimes A$ は右 A-comodule 構造になっている．これに対応する linear representation を $\mathbf{G}$ の **regular representation** という．

注意 2.28 $\mathbf{G} = \operatorname{Spec} A$ を affine group scheme, (V, ρ) を右 A-comodule, $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ を ρ に対応する linear representation とする．これに対し $\mathbf{G}(k)$ の V 上の線形表現 $\Phi_k : \mathbf{G}(k) \to GL(V)$ が得られるが, これによる $g \in \mathbf{G}(k)$ の V への作用は, $\mathbf{G}(k) = \mathrm{Alg}_k(A, k) \subset A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ とみなしたときの左 A^*-module としての作用

$$g \rightharpoonup v = \sum v_0 g(v_1) \quad (v \in V)$$

と一致する (注意 1.20 を参照).

ここで $\dim V = n < \infty$ の場合を考えよう．V の基底を一組選んでおき, それを $\{v_1, \ldots, v_n\}$ とする．また, $H = k[X, 1/\det X]$ ($X = (X_{ij})_{i,j}$) を $\mathbf{GL}_n$ の座標環とする．このとき同型 $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$ が次のようにして構成できる: 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Alg}_k(H, R) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{GL}_n(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{GL}_V(R) \\ g & \mapsto & g(X) & \mapsto & [\sum_{j=1}^n v_j \otimes r_j \mapsto \sum_{i,j=1}^n v_i \otimes g(X_{ij}) r_j]. \end{array}$$

一番右は要するに, R 成分の n 項縦ベクトルに $g(X)$ を右からかける作用と同じで,

$$(v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto (v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1)(1 \otimes g(X)) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

とも書ける．この同型 $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$ を $\mathbf{GL}_n$ の V 上の linear representation とみたときに, これに対応する V の右 H-comodule 構造を ρ_0 と書くことにする:

$$\rho_0 : V \to V \otimes H, \quad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes X_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

さて, $\mathbf{G} = \operatorname{Spec} A$ を affine group scheme とするとき, $\mathbf{G}$ の V 上の任意の linear representation $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ は必ず $\mathbf{GL}_n$ を経由する. つまり, ある homomorphism $\Psi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_n$ があって, $\Phi : \mathbf{G} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$ と書ける. この Ψ に対応する Hopf algebra map を $\psi : H \to A$ とすると, Φ に対応する V の右 A-comodule 構造は

$$V \xrightarrow{\rho_0} V \otimes H \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\psi} V \otimes A, \quad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes \psi(X_{ij}) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

と書ける. $\Delta(\psi(X_{ij})) = \sum_{s=1}^n \psi(X_{is}) \otimes \psi(X_{sj})$ だから, 以上により次が言えたことになる:

補題 2.29 $\mathbf{G} = \operatorname{Spec} A$ を affine group scheme, V を $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を基底とする n 次元ベクトル空間とし, V に右 A-comodule 構造 $\rho : V \to V \otimes A$ が与えられているとする. このとき $\rho(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$ となる $a_{ij} \in A$ をとれば,

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_{s=1}^n a_{is} \otimes a_{sj} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

が成立する. また $\det(a_{ij})_{i,j}$ は A の可逆元である.

2.10 有限性定理

定理 2.30 C を coalgebra, (V, ρ) を右 C-comodule とする. このとき V は有限次元 subcomodule たちの filtered union になっている. すなわち, ある directed set Λ により添え字づけられた有限次元 subcomodule の族 $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ で $i < j \Rightarrow V_i \subset V_j$ なるものがあって, $V = \bigcup_{i\in\Lambda} V_i$ と書ける.

[証明] 2つの有限次元 subcomodule の和はまた有限次元 subcomodule となるので, 任意の $v \in V$ に対し, v を含む有限次元 subcomodule が必ず存在することを示せばよい. $\{c_i\}$ を C の基底とし, $\rho(v)$ を

$$\rho(v) = \sum_i v_i \otimes c_i \quad (\text{有限個の } i \text{ を除き } v_i = 0)$$

と書く. このとき $V' = \operatorname{Span}_k\{v, v_i\}$ (v と v_i たちで張られる V の部分空間) とすると, これは有限次元となる. この V' が subcomodule になることを示す. 各 i に対し

$$\Delta(c_i) = \sum_{j,l} r_{ijl} c_j \otimes c_l$$

となる $r_{ijl} \in k$ をとると,

$$\sum_i \rho(v_i) \otimes c_i = \sum_i v_i \otimes \Delta(c_i) = \sum_{i,j,l} v_i \otimes r_{ijl} c_j \otimes c_l = \sum_{i,j,l} v_l \otimes r_{lji} c_j \otimes c_i$$

(最後の等式は i と l を付け替えただけ) だから,

$$\rho(v_i) = \sum_{j,l} v_l \otimes r_{lji} c_j \in V' \otimes C$$

を得る. よって $\rho(V') \subset V' \otimes C$ となり, V' は v を含む有限次元 subcomodule であることがいえた. □

定理 2.31 任意の commutative k-Hopf algebra A は, k 上有限生成な Hopf subalgebra たちの filtered union である.

[証明] A 自身は Δ により右 A-comodule とみなせるから, 定理 2.30 により有限次元 subcomodule たちの filtered union になっている. そこで, 任意の有限次元 subcomodule $V \subset A$ が, ある k 上有限生成な Hopf subalgebra に含まれることを示せばよい. $\{v_i\}$ を V の基底とし, $\rho(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$ となるような $a_{ij} \in A$ をとれば, 補題 2.29 により $\Delta(a_{ij}) = \sum_s a_{is} \otimes a_{sj}$ となる. そこで $U = \mathrm{Span}_k\{v_i, a_{ij}\}$ とおけば U は $\Delta(U) \subset U \otimes U$ を満たす. さらに $L = U + S(U)$ とおけば $S(L) \subset L$ となり[4], また, S は anti-coalgebra map (命題 1.32) なので, $\Delta(L) \subset L \otimes L$ も満たす. 従って, L で生成される A の subalgebra $k[L]$ は V を含む Hopf subalgebra となる. しかも L が有限次元なので $k[L]$ は k 上有限生成である. □

k 上有限生成な commutative Hopf algebra で represent される affine group scheme を **algebraic** affine group scheme という. 定理 2.31 を言い換えると, 次のようになる:

系 2.32 体 k 上の affine group scheme は, 常に algebraic affine group scheme たちの inverse limit (projective limit) である.

2.11 有限生成なら $\mathbf{GL}_n$ の closed subgroup に帰着すること

定理 2.33 $\mathbf{G}$ を algebraic affine group scheme とするとき, ある closed embedding $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ ($^\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$) が存在する.

[証明] $A = k[\mathbf{G}]$ とすると A は有限生成 Hopf algebra なので, 定理 2.31 により, ある有限次元 subcomodule $V \subset A$ で $k[V] = A$ を満たすものがある. $n = \dim V$ とし, $\mathbf{GL}_n$ の座標環 $k[X, 1/\det X]$ ($X = (X_{ij})_{i,j}$) をとる. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし, $\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$ ($j = 1, \ldots, n$) となる a_{ij} をとれば, 補題 2.29 により

$$k[X, 1/\det X] \to A, \quad X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

[4] $\mathbf{G} = \mathrm{Spec}\, A$ とすると $\mathbf{G} \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbf{G} \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbf{G}$ は identity map だから, $S \circ S = \mathrm{id}_A$ であることに注意.

は Hopf algebra map である．後はこれが全射であることを示せばよいが，それは $v_j = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(v_j)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(v_i) a_{ij}$ $(j = 1, \dots, n)$ により従う． $\square$

例 2.34 上記の定理の証明に沿って $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ の $\mathbf{GL}_2$ への closed embedding を構成する．$\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ の座標環を $k[Y]$ (Y は primitive) とする．$V = k + kY$ とすれば，これは 2 次元の subcomodule で $k[V] = k[Y]$ を満たす．V の基底として $v_1 = 1$, $v_2 = Y$ をとれば，

$$\Delta(v_1, v_2) = (1 \otimes 1, 1 \otimes Y + Y \otimes 1) = (v_1 \otimes 1, v_2 \otimes 1) \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 1 \otimes Y \\ 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix}$$

だから，$\mathbf{GL}_2$ の座標環 $k[X, 1/\det X]$ からの Hopf algebra map

$$\varphi : k[X, 1/\det X] \to k[Y], \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．φ に対応する homomorphism を $\Phi : \mathbf{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbf{GL}_2$ とすると，各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して Φ_R は

$$\Phi_R : \mathbf{G}_{\mathrm{a}}(R) \to \mathbf{GL}_2(R), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という群準同型である．