2009 年度 代数学概論 II

Picard-Vessiot 理論の一般化

天野勝利

参考文献

[1] M. Takeuchi, “A Hopf algebraic approach to the Picard-Vessiot theory”, J. Algebra 122 (1989), 481–509.

[2] K. Amano, A. Masuoka, M. Takeuchi, “Hopf algebraic approach to Picard-Vessiot theory”, In: M. Hazewinkel (ed.), “Handbook of Algebra”, Vol. 6, Elsevier, 2009, pp. 127–171.

ここでは竹内先生の 1989 年の論文 [1] の内容 ([2] でいうと Part II の範囲) を, (C-ferential algebra の代わりに) D-module algebra の言葉でフォローしていくことにします.

※ 2015 年 3 月 22 日追記: 最後の方を書きかけたままずっと放置してしまっていたのですが, 今年度きっかけがあったので加筆修正を加えて完成させました.

3　D-加群体の Picard-Vessiot 理論

以下, 体 R をひとつとりこれを基礎体とする[1]. また, D を R 上の cocommutative bialgebra とする.

3.1　D-加群代数と smash 積

定義 3.1 R-algebra A が D**-module algebra** (D-加群代数) であるとは, A が次の (i)(ii) を満たすことをいう:

(i) (R-linear な) D-module 構造 $D \otimes_R A \to A$, $d \otimes a \mapsto da$ をもつ.

(ii) 任意の $a, b \in A$ と $d \in D$ について

$$d(ab) = \sum (d_1 a)(d_2 b), \quad d(1) = \varepsilon(d)1.$$

また, D-module algebra で体になっているものを D-module field (D-加群体) と呼ぶ.

[1] 記号 k は後で別の意味に用いるので, 代わりに R を使います. 前章とは記号 R の使い方が全然違うので注意してください.

注意 3.2 algebra A が (i) を満たすとき, (ii) は

$$\rho_A : A \to \mathrm{Hom}_R(D, A), \quad a \mapsto [d \mapsto da]$$

が algebra map であることと同値である ($\mathrm{Hom}_R(D, A)$ は $*$-積により algebra とみなしている). A が commutative D-module algebra ならば $\mathrm{Hom}_R(D, A)$ も commutative で (演習 1.11), さらに D の $\mathrm{Hom}_R(D, A)$ への作用を

$$(d\varphi)(c) = \varphi(cd) \quad (c, d \in D, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_R(D, A))$$

により定めれば, これにより D-module algebra の構造をもつ. このとき ρ_A は単射な **D-module algebra map** (D-linear な algebra map) である.

演習 3.3 注意 3.2 に書いてあることを確かめよ.

定義 3.4 A を D-module algebra とするとき, $A \otimes_R D$ に積を

$$(a \otimes c)(b \otimes d) = \sum a(c_1 b) \otimes c_2 d$$

により入れた algebra を $A\#D$ と書き, A と D の **smash product** (smash 積) と呼ぶ. また, $a \otimes d \in A \otimes_R D$ を $A\#D$ の元としてみたものを $a\#d$ と書くことにする.

例 3.5 (differential algebra) $D = R[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ を n 個の primitive 元 $\partial_1, \ldots, \partial_n$ で生成される bialgebra とする (環としては n 変数多項式環と同型). この場合 commutative D-module algebra とは, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ を R-derivation とする (partial) differential algebra のことである (注意 1.6 を思い出してください).

例えば $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環とし, A の D-加群構造を $f \in A$ に対し $\partial_i f = \partial f/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とすることにより定めれば, A は D-module algebra となる. また, A と D の smash 積 $A\#D$ は多項式係数の線形微分作用素環 (Weyl 代数) と同じ環になる. D という記号の使い方が代数解析とは少し異なるが, ここでは定数係数の線形微分作用素環を D と書いて, その上に係数環を載せているという感じ.

例 3.6 (普遍包絡環) A を commutative algebra, L を Lie algebra とし, L が A に R-derivation として作用しており, また $L \to \mathrm{End}_R(A)$ が Lie algebra map であったとする. これを algebra map $U(L) \to \mathrm{End}_R(A)$ に拡張することで A に $U(L)$-module 構造が定まるが, それにより A は $U(L)$-module algebra となる. ($U(L)$ の bialgebra 構造は例 1.25 で入れたもの.) 上記の例 3.5 は, この例において L を n 次元の abelian Lie algebra とした場合にあたる.

例 3.7 (群環) G を群, $D = RG$ (群環) とする. D の bialgebra 構造は G の元が grouplike になるように定める (例 1.27). この場合 D-module algebra とは, G が algebra automorphism として作用する algebra のことである.

例 3.8 (微分差分) G を群, L を Lie algebra とし, G が L に Lie algebra automorphism として作用しているとする. このとき G は $U(L)$ に algebra automorphism として作用するから, $U(L)$ は RG-module algebra となる. ここで $D = U(L)\#RG$ に $U(L)\otimes_R RG$ としての coalgebra 構造 (注意 1.22) を入れると, D は bialgebra (実は Hopf algebra) となる.

例えば $G = \mathbb{Z}^m$, $L = \bigoplus_{i=1}^n R\partial_i$ を n 次元の abelian Lie algebra とし, G は L に trivial に (恒等写像として) 作用しているとする. $\mathbb{Z}^m$ の標準基底を $\tau_1, \dots, \tau_m$ とすると, $RG = R[\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_m^{-1}]$ と書けるので,

$$D = U(L) \otimes_R RG = R[\partial_1, \dots, \partial_n, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_1^{-1}, \dots, \tau_m^{-1}]$$

となる ($\partial_1, \dots, \partial_n$ は primitive, $\tau_1, \dots, \tau_m$ は grouplike). この場合 commutative D-module algebra とは, $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ を R-derivation とする (partial) differential algebra であって, $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ を ($\partial_1, \dots, \partial_n$ と可換で R-linear な) 差分作用素とする (partial) difference algebra でもあるもののことである.

例 3.9 (higher derivation) $D = B(k)$ を例 1.26 の bialgebra とすると, D-module algebra とは, (R-linear な) higher derivation $\{d_0, d_1, \dots\}$ をもつ algebra のことである.

以下, 本稿の終わりまで, **特に断らない限り D-module algebra は常に commutative であると仮定する**. (この先に登場する algebra で非可換の可能性があるのは D とその subalgebra, smash 積, および文脈から可換とは限らないと分かるもの (例えば 命題 3.14 の E など) に限られます.)

定義 3.10 (constants) V を左 D-module とするとき, V の subspace V^D を

$$V^D := \{v \in V \mid dv = \varepsilon(d)v \quad (^\forall d \in D)\}$$

により定め, これを V の **constants** (または **D-invariants**) と呼ぶ. A が D-module algebra ならば A^D は A の subalgebra となるが, これを A の**定数環** (もし体になるなら**定数体**) という.

例 3.11 例 3.5 の $D = R[\partial_1, \dots, \partial_n]$ と $A = R[x_1, \dots, x_n]$ をとる. このとき $\varepsilon(\partial_i) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ なので,

$$A^D = \{f \in A \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)\} = R.$$

つまり「微分して 0 になるもの全体」だから, differential algebra としての定数環と一致する.

例 3.12 G を群, $D = RG$, A を D-module algebra とする．このとき

$$A^D = \{a \in A \mid ga = a \ \ ({}^\forall g \in G)\} = A^G.$$

すなわち, A^D は G の作用に関する不変元全体である．この場合は ‘constants’ より ‘D-invariants’ という言い方の方がしっくりくるかもしれない.

A を D-module algebra とし, 左 $A\#D$-module の圏を ${}_{A\#D}\mathcal{M}$ と書くことにする. $V, W \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ に対し, $V \otimes_A W$ も

$$(a\#d)(v \otimes w) = a \sum d_1 v \otimes d_2 w \quad (a \in A, \ \ d \in D, \ \ v \in V, \ \ w \in W)$$

により左 $A\#D$-module の構造をもつ. (これにより ${}_{A\#D}\mathcal{M}$ は abelian tensor category となる.)

任意の $V \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ について,

$$\mathrm{Hom}_{A\#D}(A, V) \xrightarrow{\sim} V^D, \quad \varphi \mapsto \varphi(1)$$

は左 A^D-module isomorphism になる (逆写像は $v \mapsto [a \mapsto av]$). とくに $\mathrm{End}_{A\#D}(A)$ を写像の合成を積として algebra とみなせば, $\mathrm{End}_{A\#D}(A) \xrightarrow{\sim} A^D$ は algebra isomorphism である．また, functor $(-)^D : {}_{A\#D}\mathcal{M} \to {}_{A^D}\mathcal{M}$ は functor $\mathrm{Hom}_{A\#D}(A, -)$ と同型になる.

3.2 simple D-module algebra とその特徴づけ

定義 3.13 A を D-module algebra とする．$0 \neq V \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ について, もし V の $A\#D$-submodule が 0 と V 以外に存在しないならば V を **simple** $A\#D$-module と呼ぶ. また, A 自身が simple $A\#D$-module のとき, A は **simple D-module algebra** であるという．言いかえれば, A が simple であるとは A が non-trivial な D-stable ideal[2] をもたないことをいう．特に, D-module field は simple D-module algebra である.

命題 3.14 $X \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ が simple であるための必要十分条件は, 次の (a)(b) を満たすことである.

(a) $E := \mathrm{End}_{A\#D}(X)$ は斜体である (積は写像の合成).

(b) 任意の $Y \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ に対し, 次は単射:

$$\mathrm{Hom}_{A\#D}(X, Y) \otimes_E X \xrightarrow{\text{eval.}} Y, \quad f \otimes x \mapsto f(x).$$

[2] $A \supset I$ が D-stable とは $DI \subset I$ を満たすことをいう.

[証明] (十分性) X が (a)(b) を満たすとする．$Z \subsetneq X$ を任意の proper submodule として $Z = 0$ を示そう．任意の $z \in Z$ をとる．$f : X \twoheadrightarrow X/Z$ を標準全射とすると $f(z) = 0$ であるから, $\mathrm{Hom}_{A\#D}(X, X/Z) \otimes_E X \to X/Z$ の単射性により $f \otimes_E z = 0$ でなければならない．しかし Z が proper submodule だから $f \neq 0$ であり, また E は斜体だから, これは $z = 0$ を意味する．よって $Z = 0$.

(必要性) (a) 任意の $0 \neq f \in E$ について, $\mathrm{Im} f$ は X の 0 でない submodule なので $\mathrm{Im} f = X$ である．また $\mathrm{Ker}\, f$ は X の proper submodule なので $\mathrm{Ker}\, f = 0$. 従って f は isomorphism で, 逆元 f^{-1} をもつ.

(b) 上と同様に, 任意の $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{A\#D}(X, Y)$ に対し $\mathrm{Ker}\, f = 0$ となる．よって準同型定理より $f : X \to \mathrm{Im} f$ は isomorphism である．さて, (b) を示すには任意の E-linearly independent な $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{Hom}_{A\#D}(X, Y)$ について, 和 $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im} f_i$ $(\subset Y)$ が直和になっていることをいえばよい．これを r に関する帰納法で示す．$r = 1$ のときは明らか．$r > 1$ のとき, 帰納法の仮定として和 $\sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{Im} f_i$ は直和になっているとする．そして, 矛盾を導くため, $\mathrm{Im} f_r \cap \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{Im} f_i \neq 0$ を仮定する．このとき $\mathrm{Im} f_r$ は simple だから $\mathrm{Im} f_r = \mathrm{Im} f_r \cap \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{Im} f_i \subset \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{Im} f_i$ となる．そこで $\varphi_i \in E$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ を

$$\varphi_i : X \xrightarrow{f_r} \mathrm{Im} f_r \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{Im} f_i \xrightarrow{\text{proj.}} \mathrm{Im} f_i \xrightarrow{f_i^{-1}} X$$

により定めれば $f_r = \sum_{i=1}^{r-1} f_i \circ \varphi_i$ を得る．これは $f_1, \ldots, f_r$ が E-linearly independent であることに矛盾する. □

系 3.15 D-module algebra A が simple であるための必要十分条件は, 次の (a)(b) を満たすことである.

(a) A^D は体.

(b) 任意の $V \in {}_{A\#D}\mathcal{M}$ について, $A \otimes_{A^D} V^D \to V$, $a \otimes v \mapsto av$ は単射.

[証明] 同型 $\mathrm{End}_{A\#D}(A) \simeq A^D$, $\mathrm{Hom}_{A\#D}(A, V) \simeq V^D$ により命題 3.14 を読みかえればよい. □

注意 3.16 ${}_{A\#D}\mathcal{M}$ に限らず, 任意の abelian category について命題 3.14 の類似が成り立つ (文献 [2] の Proposition 12.5 を参照).

3.3 Wronskian および Casoratian の一般化

A を D-module algebra とするとき, $\mathrm{Hom}_R(D, A)$ も D-module algebra となることを注意 3.2 で述べた．$\rho_A : A \to \mathrm{Hom}_R(D, A)$ は単射 D-module algebra map であっ

たから, A は ρ_A を通じて $\mathrm{Hom}_R(D,A)$ の D-module subalgebra とみなすことができる. 一方,

$$\sigma_A : A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(D,A)^D, \quad a \mapsto a\varepsilon$$

は algebra isomorphism である (逆写像は $\varphi \mapsto \varphi(1)$). すると, A を σ_A を通じて $\mathrm{Hom}_R(D,A)$ の定数環とみなすことも可能である[3].

補題 3.17 もし A が simple D-module algebra ならば,

$$A \otimes_{A^D} A \to \mathrm{Hom}_R(D,A), \quad a \otimes b \mapsto a\rho_A(b) = [d \mapsto a(db)] \tag{3.1}$$

は単射である.

[証明] A を ρ_A を通じて $\mathrm{Hom}_R(D,A)$ の D-module subalgebra とみなせば, それにより $\mathrm{Hom}_R(D,A)$ は左 $A\#D$-module の構造をもつ ($(b\#d)\varphi = \rho_A(b) * (d\varphi)$). ここで, $V = \mathrm{Hom}_R(D,A)$ とおくと,

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes_{A^D} A & \xrightarrow[\sigma_A \otimes \mathrm{id}]{\sim} & V^D \otimes_{A^D} A & \xrightarrow[\mathrm{tw}]{\sim} & A \otimes_{A^D} V^D & \to & V \\ & & & & b \otimes \varphi & \mapsto & \rho(b) * \varphi \end{array}$$

が件の写像と一致するが, 系 3.15 によりこれは単射である. □

命題 3.18 K を D-module field とする. (すると系 3.15 により K^D も体である.) このとき K の n 個の元 $a_1, \dots, a_n \in K$ が K^D 上線形独立であるための必要十分条件は, ある $h_1, \dots, h_n \in D$ が存在して $\det(h_i a_j)_{i,j} \neq 0$ となることである.

[証明] (十分性) $\sum_{j=1}^n c_j a_j = 0$ ($c_j \in K^D$) であったとする. すると, $i = 1, \dots, n$ について $\sum_{j=1}^n c_j(h_i a_j) = h_i(\sum_{j=1}^n c_j a_j) = 0$, すなわち

$$\begin{pmatrix} h_1 a_1 & \cdots & h_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n a_1 & \cdots & h_n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(h_i a_j)_{i,j} \neq 0$ より $(h_i a_j)_{i,j}$ は正則行列だから, $c_1 = \cdots = c_n = 0$ を得る.

(必要性) n 次元 K^D-ベクトル空間 $W := K^D a_1 + \cdots + K^D a_n \subset K$ をとる. 補題 3.17 を K に適用し, 単射 (3.1) を $K \otimes_{K^D} W$ に制限したものを

$$\beta : K \otimes_{K^D} W \to \mathrm{Hom}_R(D,K), \quad b \otimes w \mapsto [d \mapsto b(dw)]$$

[3] なお, 両者の共通部分は $\rho_A(A) \cap \sigma_A(A) = A^D\varepsilon$.

とおく. また,

$$\gamma : K \otimes_R D \to \mathrm{Hom}_{K^D}(W, K), \quad a \otimes d \mapsto [w \mapsto a(dw)]$$

とすると, β は γ の転置 K-線形写像とみなせる ($\mathrm{Hom}_K(K \otimes_R D, K) \simeq \mathrm{Hom}_R(D, K)$, $K \otimes_{K^D} W \simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_{K^D}(W, K), K)$ に注意) ので, γ は全射である[4]. 従って, $\mathrm{Im}\gamma = K\gamma(D) = \mathrm{Hom}_{K^D}(W, K)$ だから, ある $h_1, \ldots, h_n \in D$ が存在して $\gamma(h_1), \ldots, \gamma(h_n)$ が $\mathrm{Hom}_{K^D}(W, K)$ の K-basis となる (もしそのような n 個の元が存在しないなら $\dim_K K\gamma(D) < n$ となってしまい矛盾が生じる). ここで K-線形同型

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{K^D}(W, K) & \xrightarrow{\sim} & K^n \\ & & \varphi & \mapsto & (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \\ (c_1, \ldots, c_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n c_i \gamma(h_i) & \mapsto & (\sum_{i=1}^n c_i(h_i a_j))_j = (c_1, \ldots, c_n)(h_i a_j)_{i,j} \end{array}$$

を考えれば, 行列 $(h_i a_j)_{i,j}$ が正則であることがわかる. $\square$

系 3.19 (1) (K, ∂) を differential field, K_0 を K の定数体とする. このとき, n 個の元 $a_1, \ldots, a_n \in K$ が K_0 上線形独立 $\Leftrightarrow$ $\det(\partial^{i-1} a_j)_{i,j} \neq 0$ (**Wronskian criterion**).

(2) (K, τ) を difference field, K_0 を K の定数体とする. このとき, n 個の元 $a_1, \ldots, a_n \in K$ が K_0 上線形独立 $\Leftrightarrow$ $\det(\tau^{i-1} a_j)_{i,j} \neq 0$ (**Casoratian criterion**).

(3) L/K を n 次 Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ とすると, n 個の元 $a_1, \ldots, a_n \in L$ が K 上線形独立 $\Leftrightarrow$ $\det(\sigma_i(a_j))_{i,j} \neq 0$.

[証明] (1) $D = R[\partial]$ を 1 つの primitive 元 ∂ で生成される bialgebra とすれば, K は D-module field である. 上記命題の証明中で, $\mathrm{Ker}\,\gamma$ は $K\#D$ の左 ideal になる. そこで, 多項式環における Euclid の互除法と同様にすれば, $\mathrm{Ker}\,\gamma$ はある 1 つの monic な n 階微分作用素で (左 ideal として) 生成されることが分かる. 従って $h_1, \ldots, h_n$ として $1, \ldots, \partial^{n-1}$ がとれる.

(2) は (1) と同様.

(3) は $D = KG$ として L に対して命題を適用すればよい. $\square$

上記の (3) はもともと Dedekind の補題に関連して出てくる事実です. (一般に, L/K を体拡大とすると, n 個の互いに異なる元 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathrm{Aut}(L/K)$ は $\mathrm{End}_K(L)$ において L 上線形独立になる.)

[4]一般に, K を体, M, N を K-ベクトル空間, $\varphi : N \to M$ を K-線形写像とし, $\varphi^* : \mathrm{Hom}_K(M, K) \to \mathrm{Hom}_K(N, K)$ を φ の転置写像とすると, φ^* が単射 $\Leftrightarrow$ φ が全射, である. 実際, $M' = \mathrm{Coker}\,\varphi$ として完全列 $N \xrightarrow{\varphi} M \to M' \to 0$ に $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ を適用すると完全列 $0 \to \mathrm{Hom}_K(M', K) \to \mathrm{Hom}_K(M, K) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_K(N, K)$ が得られるので, φ^* が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_K(M', K) = 0 \Leftrightarrow M' = 0$.

3.4 Sweedler の対応定理

この小節では, 後で Picard-Vessiot 拡大の Galois 対応を示す時に重要になる Sweedler の対応定理とその D-module field バージョンについて解説する. 準備としてまず, coring とその coideal の概念を定義しよう.

定義 3.20 (coring) 一般に, A を環とするとき, (A, A)-bimodule M が A**-coring** であるとは, ある (A, A)-bimodule map

$$\mathbf{\Delta} : M \to M \otimes_A M, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : M \to A$$

があって, 余結合律, 余単位律を満たすことをいう. M が A-coring であるとき, (A, A)-subbimodule $J \subset M$ が **coideal** であるとは,

$$\mathbf{\Delta}(J) \subset \mathrm{Ker}(M \otimes_A M \twoheadrightarrow (M/J) \otimes_A (M/J)), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(J) = 0$$

が成り立つことをいう. このとき M/J も (coalgebra の quotient と同様に) $\mathbf{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ から induce される A-coring 構造をもつ. また, A**-coring map** の概念が coalgebra map と同様に定義できる. A-coring map の kernel が coideal になることもまた同様である. それから A-coring M に対して, M**-comodule** やその **subcomodule**, それから M**-comodule map** なども同様に定義できる. ただし, 右 M-comodule map の kernel が subcomodule になるかどうかは M が左 A-module として flat であるかどうかによるので注意. (もし flat なら右 M-comodule の圏は abelian category をなす.)

例 3.21 B を可換環, A を commutative B-algebra とするとき, $M = A \otimes_B A$ は

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Delta} : M \to M \otimes_A M, \quad a \otimes b \mapsto (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes b), \\ &\boldsymbol{\varepsilon} : M \to A, \quad a \otimes b \mapsto ab \end{aligned}$$

により A-coring の構造をもつ.

定理 3.22 (Sweedler) L/K を体拡大, $C = L \otimes_K L$ を上の例により L-coring とみなす. このとき C の coideal 全体と L/K の中間体全体は次により bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{C \supset J \ \ \text{coideal}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{L \supset M \supset K \ \ \text{中間体}\} \\ J & \longrightarrow & \{a \in L \mid a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a \in J\} \\ \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L) & \longleftarrow & M. \end{array}$$

[証明] 中間体 $L \supset M \supset K$ に対し $J_M := \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L)$, また coideal $J \subset C$ に対し $M_J := \{a \in L \mid a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a \in J\}$ とおく. また $\pi_J : L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_K L/J$ を標準全射とすれば $M_J = \{a \in L \mid \pi_J(a \otimes 1) = \pi_J(1 \otimes a)\}$ とも書ける.

まず, $L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L$ は L-coring map なので J_M が C の coideal になることは明らか. 次に M_J について, M_J が K を含むことと L の和と積で閉じていることは容易に分かる. 任意の $0 \neq t \in M_J$ について, $\pi_J(t^{-1} \otimes 1) = t^{-1}\pi_J(1 \otimes t)t^{-1} = t^{-1}\pi_J(t \otimes 1)t^{-1} = \pi_J(1 \otimes t^{-1})$ だから, M_J は逆元についても閉じており, よって M_J は L/K の中間体である.

($\longleftarrow$) M を L/M の中間体とするとき, $M_{J_M} = M$ となることを示そう. まず, $a \in M \Rightarrow a \otimes_M 1 = 1 \otimes_M a \Leftrightarrow a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a \in J_M \Leftrightarrow a \in M_{J_M}$ だから, $M \subset M_{J_M}$. さらに, $a \in M_{J_M} \Rightarrow a \otimes_M 1 = 1 \otimes_M a$ より $M \otimes_M M_{J_M} \to M_{J_M} \otimes_M M_{J_M}$ は全射であるから, $M_{J_M} = M$ を得る (M は体だから M_{J_M} は faithfully flat M-module).

($\longrightarrow$) J を C の coideal とするとき, $J_{M_J} = J$ となることを示そう. $\zeta : L \times L \to L \otimes_K L/J$ を $\zeta(a,b) = \pi_J(a \otimes b)$ により定めれば, ζ は ${}^\forall c \in M_J$ に対し $\zeta(ca,b) = \zeta(a,cb) = c\zeta(a,b)$ を満たす bilinear map だから, これにより $\xi : L \otimes_{M_J} L \to L \otimes_K L/J$ が induce される. よって, 次の可換図式を追えば $J_{M_J} \subset J$ が分かる:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & J_{M_J} & \longrightarrow & L \otimes_K L & \longrightarrow & L \otimes_{M_J} L & \longrightarrow & 0 & \text{(exact)} \\
 & & & & \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi} & & & \\
0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & L \otimes_K L & \longrightarrow & L \otimes_K L/J & \longrightarrow & 0 & \text{(exact)}.
\end{array}$$

あとは ξ が単射であることを示せば $J_{M_J} = J$ を得る.

$C_J = L \otimes_K L/J$ とおき, $\mathfrak{A}$ を右 C_J-comodule の圏とする (ここで, C_J は左 flat L-module なので $\mathfrak{A}$ は abelian category). L は

$$\lambda : L \to L \otimes_L C_J \simeq C_J, \quad a \mapsto \pi_J(1 \otimes a)$$

により右 C_J-comodule の構造をもつ. L は non-tirival な (L,L)-subbimodule をもたないので, $\mathfrak{A}$ の simple object である. また, $f \in \mathrm{End}_L(L)$ ($\simeq L$) について, f が C_J-comodule map $\Leftrightarrow \pi_J(f(1) \otimes 1) = \pi_J(1 \otimes f(1)) \Leftrightarrow f(1) \in M_J$ だから, $\mathrm{End}_{\mathfrak{A}}(L) \simeq M_J$ で, しかもこれは algebra isomorphism になっている. よって, $\mathfrak{A}$ について命題 3.14 と同様に考えれば

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L, C_J) \otimes_{M_J} L \xrightarrow{\text{eval.}} C_J \tag{3.2}$$

が単射であることが分かる. さらに, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L, C_J) \to L$, $f \mapsto \boldsymbol{\varepsilon} f(1)$ は M_J-module isomorphism である. 実際, 逆写像が $a \mapsto [b \mapsto \pi_J(a \otimes b)]$ で与えられる: 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L, C_J)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\pi_J(\boldsymbol{\varepsilon} f(1) \otimes b) &= \boldsymbol{\varepsilon} f(1)\lambda(b) = \boldsymbol{\varepsilon} f(1) \sum b_0 \otimes b_1 = \sum \boldsymbol{\varepsilon} f(b_0) \otimes b_1 \\
&= ((\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathrm{id}) \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda)(b) = ((\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\Delta} \circ f)(b) = f(b).
\end{aligned}$$

この同型 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L, C_J) \simeq L$ により (3.2) を読み直すと ξ と一致するので, ξ が単射であることがいえた. $\square$

一般に, A を D-module algebra, B を A の D-module subalgebra とするとき, $A \otimes_B A$ は D の作用

$$d(a \otimes b) = \sum d_1 a \otimes d_2 b$$

により D-module algebra の構造をもつ[5]. このとき $A \otimes_B A$ の D-stable な (A, A)-subbimodule とは $A \otimes_B A$ の D-stable ideal のことである. また $A \otimes_B A$ を例 3.21 のように A-coring とみたとき, その構造射 $\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ は D-module algebra map になっている.

系 3.23 L/K が D-module field の拡大であるとき, $L \otimes_K L$ の D-stable coideal の全体と L/K の中間 D-module field の全体とが (定理 3.22 のように) bijective に対応する.

[証明] M が L/K の中間 D-module field であるとき, $L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L$ は D-module algebra map なので, J_M は D-stable である. 一方, J が $L \otimes_K L$ の D-stable coideal であるとき, $L \to L \otimes_K L/J$, $a \mapsto \pi_J(a \otimes 1 - 1 \otimes a)$ は D-linear なので, その kernel である M_J は D-stable となる. □

3.5 Picard-Vessiot 拡大の Galois 対応 I

定義 3.24 D-module field の拡大 L/K が次の (a), (b) を満たすとき, **Picard-Vessiot 拡大**という.

(a) $L^D = K^D$ ($=: k$ と書く),

(b) ある D-module subalgebra $L \supset A \supset K$ があって, A の商体が L と一致し, さらに $A \otimes_K A$ は $H := (A \otimes_K A)^D$ によって左 A-module として生成される (すなわち $A \otimes_K A = A \cdot H$).

注意 3.25 この定義はホップガロア的なもので, Kaplansky の本に書いてある従来の定義とはだいぶ異なって見えますが, 後で 3.11 節において両者の関係について調べるので安心してください. (実は従来の定義より少しだけ一般的です.)

命題 3.26 L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $k = L^D = K^D$ とし, 定義 3.24 の (b) を満たす A, H をとる.

(1) $\mu : A \otimes_k H \to A \otimes_K A$, $a \otimes h \mapsto ah$ は D-module algebra isomorphism である. (また, 同様に $H \otimes_k A \to A \otimes_K A$, $h \otimes a \mapsto ha$ も isomorphism で, さらにこれらを拡張した $L \otimes_k H \to L \otimes_K A$, $H \otimes_k L \to A \otimes_K L$ も isomorphism).

---

[5] ここで D の余可換性を使っているので注意

(2) $A \otimes_K A$ の A-coring 構造 $\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ により, H にある k-Hopf algebra 構造 Δ_H, ε_H が induce される (antipode は $\mathrm{tw} : A \otimes_K A \to A \otimes_K A$, $a \otimes b \to b \otimes a$ を制限したもの).

(3) A は $\theta : A \to A \otimes_k H$, $a \mapsto \mu^{-1}(1 \otimes a)$ により右 H-comodule となる. また, θ から induce される左 A-linear map ${}_A\theta : A \otimes_K A \to A \otimes_k H$, $a \otimes b \mapsto a\theta(b)$ は μ^{-1} と一致し, isomorphism となる.

(4) 定義 3.24 の (b) を満たす algebra A は unique である.

[証明] (1) μ が D-module algebra map であることは明らか. 系 3.15 を L に適用して $V = L \otimes_K A$ とすれば, 単射 $L \otimes_k (L \otimes_K A)^D \to L \otimes_K A$ を得る. μ はこの写像の $A \otimes_k H$ への制限だから単射である. 他方, 条件 (b) の $A \otimes_K A = A \cdot H$ により μ の全射性が従う. (また, これを $\mathrm{tw} : A \otimes_K A \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A$ を介して読みかえれば $H \otimes_k A \simeq A \otimes_K A$ を得る.)

(2) $C = A \otimes_K A$ とおく. ε_H は $\boldsymbol{\varepsilon} : C \to A$ に $(-)^D$ をかけたものとする ($A^D = k$ に注意):

$$\varepsilon_H : H \to k, \quad \sum a_i \otimes b_i \mapsto \sum a_i b_i.$$

さて (1) より, 次は D-module algebra isomorphism である:

$$A \otimes_k H \otimes_k H \xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}} A \otimes_K A \otimes_k H \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} A \otimes_K A \otimes_K A \simeq C \otimes_A C.$$

これに $(-)^D$ をかければ, k-algebra としての同型

$$H \otimes_k H \xrightarrow{\sim} (C \otimes_A C)^D, \quad g \otimes_k h \mapsto g \otimes_A h$$

を得る. 同様にすれば

$$H \otimes_k H \otimes_k H \xrightarrow{\sim} (C \otimes_A C \otimes_A C)^D, \quad f \otimes_k g \otimes_k h \mapsto f \otimes_A g \otimes_A h$$

等々も得られる. そこで, $\Delta_H : H \to H \otimes_k H$ を $\boldsymbol{\Delta}^D : C^D \to (C \otimes_A C)^D$ から induce される k-algebra map としよう. すると, $(C, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon})$ が余結合律, 余単位律を満たすことを表す可換図式に $(-)^D$ をかけたものを考えて, それを $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ のほうに読みかえれば, H が k-coalgebra になることが分かる. そして Δ_H, ε_H は k-algebra map だから, これにより H は k-bialgebra となる.

さて, D は cocommutative なので $\mathrm{tw} : C \to C$ は D-module algebra map である. これに $(-)^D$ をかけたものを $S_H = \mathrm{tw}^D : H \to H$ とおき, これが H の antipode になることを示そう. 次の二つの写像

$$C \xrightarrow{\boldsymbol{\Delta}} C \otimes_A C \xrightarrow{m\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{tw})} C, \quad C \xrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}} A \xrightarrow{-\otimes 1} C$$

(m は C の積) はどちらも $a \otimes b \mapsto ab \otimes 1$ となり一致する. これらに $(-)^D$ をかけたものを考えると, $\mathrm{id}_H * S_H = u\varepsilon_H$ を得る (u は $k \to H$). 同様に, $m \circ (\mathrm{tw} \otimes \mathrm{id}) \circ \boldsymbol{\Delta} = (1 \otimes -) \circ \boldsymbol{\varepsilon}$ に $(-)^D$ をかけたものを考えれば $S_H * \mathrm{id}_H = u\varepsilon_H$ が得られる.

(3) A は $\lambda : A \to A \otimes_A C \simeq C$, $a \mapsto 1 \otimes_K a$ により右 C-comodule の構造をもつ. それを示す可換図式を, $A \otimes_k H \simeq A \otimes_K A$, $A \otimes_k H \otimes_k H \simeq C \otimes_A C$ を使って読みかえれば (A, θ) が右 H-comodule になることが分かる. また, 明らかに $\mu \circ {}_A\theta = \mathrm{id}$ だから ${}_A\theta = \mu^{-1}$ である.

(4) A, B がどちらも条件 (b) を満たす D-module subalgebra であったとして $A = B$ を示す. このとき AB も (b) を満たすので, 最初から $A \subset B$ であったと仮定してよい. $H_A = (A \otimes_K A)^D$, $H_B = (B \otimes_K B)^D$ とすれば, H_A は H_B の Hopf subalgebra となる. よって, H_B/H_A は faithfully flat extension である[6]. すると, (1) より $L \otimes_K B / L \otimes_K A$ は $L \otimes_k H_B / L \otimes_k H_A$ と同型だからやはり faithfully flat であり, 従って B/A も faithfully flat であることが分かる. よって, 任意の $a \in A$ に対し $aA = A \cap aB$ が成り立つ. さて, A の商体は L と一致するから, 任意の $b \in B \subset L$ に対し, ある $0 \neq a \in A$ が存在して $ab \in A$ となる. よって $ab \in A \cap aB = aA$ より $b \in A$ を得る. 従って $A = B$ である. □

定義 3.27 L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とするとき, 定義 3.24 の条件 (b) を満たす A を L/K の **principal D-module algebra** (または **Picard-Vessiot ring**) と呼ぶ. また, $H = (A \otimes_K A)^D$ を L/K の **Picard-Vessiot Hopf algebra** と呼び, H で represent される affine group scheme $\mathbf{G}(L/K) := \operatorname{Spec} H$ を L/K の **Picard-Vessiot group scheme** と呼ぶ (この $\mathbf{G}(L/K)$ が Galois 群にあたる). 以下, これらをひとまとめにして "$(L/K, A, H)$ が Picard-Vessiot 拡大である" という風な言い方をすることがある.

定理 3.28 (Galois 対応) L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, H をその Picard-Vessiot Hopf algebra とする. このとき, L/K の中間 D-module field の全体と, H の Hopf ideal 全体とが次のように bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{H \supset I \ \ \text{Hopf ideal}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{L \supset M \supset K \ \ \text{中間 } D\text{-module field}\} \\ H \cap \operatorname{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L) & \longleftarrow & M \\ I & \longrightarrow & \{a \in L \mid a \otimes_K 1 - 1 \otimes_K a \in I \cdot (L \otimes_K L)\}. \end{array}$$

この定理は系 3.23 と次の命題により得られる.

命題 3.29 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $k = L^D = K^D$ とする. このとき次の (i), (ii) が成立する.

[6]一般に, commutative Hopf algebra はその Hopf subalgebra 上 faithfully flat である. M. Takeuchi, "A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras", または Waterhouse の本の Chapter 13, 14 を参照.

(i) H の ideal 全体と $L\otimes_K L$ の D-stable ideal 全体は次により bijective に対応する:

$$\begin{array}{rcl} \{H\supset I \ \ \text{ideal}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{L\otimes_K L\supset J \ \ D\text{-stable ideal}\} \\ I & \longrightarrow & I\cdot(L\otimes_K L) \\ J\cap H & \longleftarrow & J \end{array}$$

(ii) 上記の対応で $I\leftrightarrow J$ のとき, I が H の Hopf ideal $\Leftrightarrow$ J が $L\otimes_K L$ の coideal.

[証明] D-module algebra B に対して $\mathcal{I}_D(B)$ を B の D-stable ideal 全体の集合, commutative k-algebra T に対して $\mathcal{I}(T)$ を T の ideal 全体の集合とする.

(i) $L\otimes_K L$ は $A\otimes_K A$ の localization だから, $\mathcal{I}_D(L\otimes_K L)\subset\mathcal{I}_D(A\otimes_K A)$ とみなせる ($J\mapsto J\cap(A\otimes_K A)$ が単射). さらにいえば, $\mathcal{I}_D(A\otimes_K A)$ の中で

$$\mathcal{I}_D(L\otimes_K A)\cap\mathcal{I}_D(A\otimes_K L)=\mathcal{I}_D(L\otimes_K L)$$

となっている. ここで, $\mathcal{I}(H)$ から $\mathcal{I}_D(A\otimes_K A)$ への写像

$$\Phi:\mathcal{I}(H)\to\mathcal{I}_D(A\otimes_k H)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_D(A\otimes_K A),\quad I\mapsto A\otimes_k I\mapsto I\cdot(A\otimes_K A)$$

を考えると, これは明らかに単射である. さらに $\mathrm{Im}\Phi=\mathcal{I}_D(L\otimes_K A)$ となることを示そう. $L\otimes_k H\simeq L\otimes_K A$ だから, 任意の D-stable ideal $\mathfrak{a}\subset L\otimes_k H$ に対し, ある H の ideal I があって $\mathfrak{a}=L\otimes_k I$ と書けることを示せばよい. 標準全射 $L\otimes_k H\twoheadrightarrow L\otimes_k H/\mathfrak{a}$ に $(-)^D$ をかけたものを $\varphi:H\to(L\otimes_k H/\mathfrak{a})^D$ とし, $I=\mathrm{Ker}\,\varphi$ とする. φ は k-algebra map だから I は H の ideal である. さて, 系 3.15 を L に適用して $V=L\otimes_k H/\mathfrak{a}$ とすれば, 単射 $L\otimes_k(L\otimes_k H/\mathfrak{a})^D\to L\otimes_k H/\mathfrak{a}$ を得る. よって, 次の可換図式を追えば $L\otimes_k I=\mathfrak{a}$ を得る:

$$\begin{array}{ccccccccl} 0 & \longrightarrow & L\otimes_k I & \longrightarrow & L\otimes_k H & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi} & L\otimes_k(L\otimes_k H/\mathfrak{a})^D & & \text{(exact)} \\ & & & & \Vert & & \downarrow\text{単射} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & L\otimes_k H & \longrightarrow & L\otimes_k H/\mathfrak{a} & \longrightarrow\ 0 & \text{(exact).} \end{array}$$

以上より, $\mathrm{Im}\Phi=\mathcal{I}_D(L\otimes_K A)$. 他方, 同型 $H\otimes_k A\simeq A\otimes_K A$, $H\otimes_k L\simeq A\otimes_K L$ を用いて上と同様の議論をすれば $\mathrm{Im}\Phi=\mathcal{I}_D(A\otimes_K L)$ となることも分かる. 従って, 実は $\mathrm{Im}\Phi=\mathcal{I}_D(L\otimes_K A)=\mathcal{I}_D(A\otimes_K L)=\mathcal{I}_D(L\otimes_K L)$ である. 故に Φ は $\mathcal{I}(H)$ から $\mathcal{I}_D(L\otimes_K L)$ への全単射を与える.

(ii) 上記と同様の議論により $\mathcal{I}(H\otimes_k H)$ と $\mathcal{I}_D(L\otimes_K L\otimes_K L)$ とが bijective に対応することが分かる[7]. (i) の対応で $I\leftrightarrow J$ であったとすると, 今の対応で $I\otimes_k H\leftrightarrow J\otimes_K L$,

[7] まず, $\mathcal{I}(H\otimes_k H)\to\mathcal{I}_D(A\otimes_K A\otimes_K A)$ が単射でその image が $\mathcal{I}_D(L\otimes_K A\otimes_K A)$, $\mathcal{I}_D(A\otimes_K L\otimes_K A)$, $\mathcal{I}_D(A\otimes_K A\otimes_K L)$ に一致することがいえる. すると $\mathcal{I}_D(A\otimes_K A\otimes_K A)$ の中で $\mathcal{I}_D(L\otimes_K A\otimes_K A)=\mathcal{I}_D(A\otimes_K L\otimes_K A)=\mathcal{I}_D(A\otimes_K A\otimes_K L)=\mathcal{I}_D(L\otimes_K L\otimes_K L)$ となっていることが分かる.

$H \otimes_k I \leftrightarrow L \otimes_K J$ となる．よって，

$$\begin{aligned} I \text{ が } H \text{ の biideal } &\Leftrightarrow \Delta_H(I) \subset I \otimes_k H + H \otimes_k I, \ \ \varepsilon_H(I) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta}(J) \subset J \otimes_K L + L \otimes_K J, \ \ \boldsymbol{\varepsilon}(J) = 0 \\ &\Leftrightarrow J \text{ が } L \otimes_K L \text{ の coideal} \end{aligned}$$

(ここで, $\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ は $L \otimes_K L$ の L-coring 構造)．あとは, H の任意の biideal I について $S_H(I) \subset I$ が成り立つことを示せばよい[8]．$S_H(I) \subset I \Leftrightarrow \mathrm{tw}(J) \subset J$ だから後者を示す．J は $L \otimes_K L$ の coideal だから, 定理 3.22 により, ある L/K の中間体 M により $J = \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L)$ と書ける．このとき, $L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L$ は twist map と可換なので, $\mathrm{tw}(J) \subset J$ が従う． □

ここで, 次の重要な事実を示しておく:

命題 3.30 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とするとき, A は simple D-module algebra である．

[証明] $0 \neq \mathfrak{a} \subset A$ を A の 0 でない D-stable ideal とする．すると $L \otimes_K \mathfrak{a}$ は $L \otimes_K A$ の D-stable ideal だから, 命題 3.29 (i) の証明により, ある H の ideal $I \subset H$ が存在して $L \otimes_K \mathfrak{a} = I \cdot (L \otimes_K A)$ となる．しかし, これに対応する $L \otimes_K L$ の D-stable ideal を考えてみると, それは $L \otimes_K \mathfrak{a}L = L \otimes_K L$ となってしまう ($\mathfrak{a} \neq 0$ で L は体だから)．従って, 実は $I = H$ である．よって $L \otimes_K \mathfrak{a} = L \otimes_K A$. これは $\mathfrak{a} = A$ を意味する． □

なお, この命題をふまえて改めて命題 3.29 (i) の証明を読み直す (系 3.15 を L に適用している部分を A に適用して読み直す) と, 実は $\Phi : \mathcal{I}(H) \to \mathcal{I}_D(A \otimes_K A)$ が全単射であり, 従って $\mathcal{I}_D(A \otimes_K A) = \mathcal{I}_D(L \otimes_K L)$ が成立することが分かる．

さて, また話を Galois 対応に戻そう:

命題 3.31 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とする．M を L/K の中間 D-module field, $I \subset H$ を M に対応する Hopf ideal とするとき, $(L/M, AM, H/I)$ は Picard-Vessiot 拡大である．

[証明] $AM \otimes_K A = AM \cdot H$ より $AM \otimes_M AM = AM \cdot (AM \otimes_M AM)^D$ を得る[9]ので, L/M は AM を principal D-module algebra とする Picard-Vessiot 拡大である．また $H \to (AM \otimes_M AM)^D$ は全射 Hopf algebra map となるが, その kernel は $H \cap$

[8] 実はこれは Hopf algebra の一般論により自動的に従います (W.D. Nichols, “Quotients of Hopf algebras”, Comm. Algebra 6 (1978), 1789–1800, を参照) が, 我々のケースではもっと簡単なので直接証明します．

[9] 竹内 [1] では $AM \otimes_M AM = \mathrm{Im}(A \otimes_K A \to L \otimes_M L)$ と書いてあるが, これは一般には正しくない．$AM \otimes_M AM = \mathrm{Im}(AM \otimes_K A \to L \otimes_M L)$ が正しい．

$\mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_M L) = I$ となるから $H/I \simeq (AM \otimes_M AM)^D$. □

この命題と定理 3.28 を affine group scheme の言葉でまとめると, 次のようになる.

定理 3.32 L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $\mathbf{G}(L/K)$ をその Picard-Vessiot group scheme とする. もし M が L/K の中間 D-module field ならば, L/M も Picard-Vessiot 拡大で, その Picard-Vessiot group scheme $\mathbf{G}(L/M)$ は $\mathbf{G}(L/K)$ のある closed subgroup scheme と同型である. そして $M \mapsto \mathbf{G}(L/M)$ は, L/K の中間 D-module field 全体と $\mathbf{G}(L/K)$ の closed subgroup scheme 全体との間の bijective な対応を与える.

3.6 Picard-Vessiot group scheme と自己同型群との関係

L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ を L の D-linear な K 上自己同型全体のなす群とする (後で分かるが, これは $\mathbf{G}(L/K)(k)$ と同型になる). 従来の Picard-Vessiot 理論では通常この自己同型群 $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ を Picard-Vessiot 群の定義とするわけだが, この群だけで十全な議論ができるのは定数体 k が標数 0 の代数閉体のときのみであり, 一般にはこの群を考えるだけでは不十分である[10]. 実際, 正標数の体上では $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ の closed subgroup と L/K の中間 D-module field とが bijective に対応しないことがある. 例えば $\mathbf{G}(L/K) = \mathbf{G}_\mathrm{a}$ のとき, $\boldsymbol{\alpha}_p \subset \mathbf{G}_\mathrm{a}$ に対応する L/K の中間 D-module field を M とすると, $L^G = M$ となるような $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ ($\simeq \mathbf{G}_\mathrm{a}(k)$) の subgroup G は存在しない.

この小節では自己同型群と Picard-Vessiot group scheme との関係について論じたいわけだが, $\mathrm{Aut}_D(L/K)$ では不十分なので, 次のような group functor を考える. L/K の principal D-module algebra を A とし, commutative k-algebra の圏 ${}_k\mathcal{A}$ から群の圏 $\underline{\mathrm{Grp}}$ への functor $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ を

$$\mathbf{Aut}_D(A/K) : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}, \quad T \mapsto \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T/K \otimes_k T)$$

により定義する. ただし, 上記の T は $dt = \varepsilon(d)t$ ($d \in D$, $t \in T$) により D-module algebra とみなし, $\mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T/K \otimes_k T)$ は $A \otimes_k T$ の D-linear な $K \otimes_k T$-algebra automorphism 全体のなす群を表す. また, 射の対応は $\mathbf{GL}_A$ と同様にとる (2.9 節)[11].

さて, 任意の $g \in \mathrm{Aut}_D(L/K)$ に対し, $g(A)$ も定義 3.24 の条件 (b) を満たすので, 命題 3.26 (4) により $g(A) = A$ である. また L は A の商体だから, $\mathrm{Aut}_D(L/K) \to \mathrm{Aut}_D(A/K)$, $g \mapsto g|_A$ は群同型である. よって, $\mathbf{Aut}_D(A/K)(k) = \mathrm{Aut}_D(A/K) = \mathrm{Aut}_D(L/K)$ とみなしてよい.

[10]詳しくは天野のホームページに「研究メモ」として置いてある "On a discrepancy among Picard-Vessiot theories in positive characteristics" を参照してください.

[11]$\mathbf{Aut}_D(A/K)$ は $\mathbf{GL}_A$ の subgroup functor.

定理 3.33 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とすると, $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ は $\mathbf{G}(L/K) = \operatorname{Spec} H$ と同型な affine group scheme である. 特に, $\mathbf{G}(L/K)(k) \simeq \mathrm{Aut}_D(A/K) = \mathrm{Aut}_D(L/K)$.

[証明] 命題 3.26 (3) の $\theta : A \to A \otimes_k H$ により A は右 H-comodule の構造を持つ. この θ に (定理 2.26 の意味で) 対応する $\mathbf{G}(L/K)$ の A 上の linear representation を $\Phi : \mathbf{G}(L/K) \to \mathbf{GL}_A$ とおく. ここで, 各 $T \in {}_k\mathcal{A}$ について $\mathbf{GL}_A(T)$ の元はその A への制限 $A \to A \otimes_k T$ によって完全に定まってしまうことと, $g \in \mathbf{G}(L/K)(T) = \mathrm{Alg}_k(H, T)$ に対し, $\Phi_T(g)|_A = (\mathrm{id}_A \otimes g) \circ \theta$ であったことを思い出そう. すると, θ は D-module algebra map であり, 任意の $a \in K$ に対して $\theta(a) = a \otimes 1$ となるから, $\Phi_T(g) \in \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T / K \otimes_k T)$ となる. よって, Φ は $\mathbf{G}(L/K)$ から $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ への homomorphism だと思ってよい. これが functorial isomorphism であることを示せば証明が終わる. そこで $\Psi : \mathbf{Aut}_D(A/K) \to \mathbf{G}(L/K)$ を定義して $\Psi = \Phi^{-1}$ であることを示そう.

任意の $T \in {}_k\mathcal{A}$ をとる. $\beta \in \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T / K \otimes_k T)$ に対して ${}_A\beta : A \otimes_K A \to A \otimes_k T$ を $a \otimes_K b \mapsto a\beta(b \otimes_k 1)$ により定めると, これは D-module algebra map である. そこで ${}_A\beta \circ \mu : A \otimes_k H \to A \otimes_k T$ に $(-)^D$ をかければ H から T への k-algebra map を得るので, それを $\Psi_T(\beta) := ({}_A\beta \circ \mu)^D \in \mathrm{Alg}_k(H, T) = \mathbf{G}(L/K)(T)$ とする. すると, $\Phi_T(\Psi_T(\beta))|_A = (\mathrm{id}_A \otimes \Psi_T(\beta)) \circ \theta = {}_A\beta \circ \mu \circ \theta = \beta|_A$ となる[12]ので $\Phi_T \circ \Psi_T = \mathrm{id}$ を得る. 他方, $\alpha \in \mathbf{G}(L/K)(T)$ に対して $\beta = \Phi_T(\alpha)$ とおくと, ${}_A\beta = (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \theta)$ となる (ここで, $\boldsymbol{\varepsilon} : A \otimes_K A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$). よって, $\Psi_T(\Phi_T(\alpha)) = ({}_A\beta \circ \mu)^D = {}_A\beta|_H = (\varepsilon_H \otimes \alpha) \circ \Delta_H = \alpha$ (命題 3.26 の証明中の定義を思い出して $(\mathrm{id}_A \otimes \theta)|_H = \Delta_H$ を確かめよ). 従って, $\Psi_T \circ \Phi_T = \mathrm{id}$ もいえた. □

※ 証明中の $\mathrm{id}_A \otimes \Psi_T(\beta) = {}_A\beta \circ \mu$ の部分ですが, $\Psi_T(\beta) = ({}_A\beta \circ \mu)^D = {}_A\beta|_H$ に注意すれば次のような写像になることが分かります:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_k H & \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes ({}_A\beta|_H)} & A \otimes_k (A \otimes_k T)^D & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_k T \\ a \otimes_k \left(\sum a_i \otimes_K b_i\right) & \mapsto & a \otimes_k \sum a_i \beta(b_i \otimes_k 1) & \mapsto & \sum a a_i \beta(b_i \otimes_k 1). \end{array}$$

3.7 coinvariants

(この 3.7 節と次の 3.8 節は 3.9 節のための準備にすぎないので, Hopf 代数に詳しい人ならば下記の補題 3.34 と補題 3.43 だけ見て 3.9 節に飛んでも差し支えありません.)

$(L/K, A, H)$ を Picard-Vessiot 拡大, M を L/K の中間 D-module field とするとき, 前節の冒頭で書いたように, L の $\mathrm{Aut}_D(L/M)$ 不変な元全体は一般には M に一致す

[12] $\mathrm{id}_A \otimes \Psi_T(\beta) = {}_A\beta \circ \mu$ の部分が少し分かりづらいですが, よく分からない人は □ 印 (証明終) の直後に書いてある※を参照してください.

るとは限らない (定数体 k が標数 0 の代数閉体である場合は必ず一致するが, そうでない場合は一概には言えない. このあたりの事情に関しては, 前に脚注で挙げた研究メモ "On a discrepancy..." を参照してください). ただ, 群の action に関する invariants の代わりに Hopf algebra の coaction に関する coinvariants (定義は下記参照) を考えるなら, ある程度一般的に言えることもある. 例えば, I を M に対応する H の Hopf ideal とするとき, 次のようなことは言える:

・M は AM の中の H/I-coinvariants である.

・$A \cap M$ は A の中の H/I-coinvariants である.

この小節ではこのようなこと (補題 3.34) を証明したい. まず, coinvariants の定義について解説しよう.

一般に, H を体 k 上の commutative Hopf algebra, (V, λ) を右 H-comodule とするとき,

$$V^{\mathrm{co}\,H} := \{v \in V \mid \lambda(v) = v \otimes 1\}$$

を V の H-**coinvariants** という (λ に対応する linear representation を考えればこの定義の妥当性がつかめるのではないかと思います). ここで, $V^{\mathrm{co}\,H}$ は $V \to V \otimes_k H$, $v \mapsto \lambda(v) - v \otimes 1$ の kernel になっているわけだが, これを $V \underset{-\otimes 1}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} V \otimes_k H$ の difference kernel といい, $V^{\mathrm{co}\,H} = \mathrm{Ker}(V \rightrightarrows V \otimes_k H)$ と書いたり

$$0 \to V^{\mathrm{co}\,H} \to V \rightrightarrows V \otimes_k H \quad \text{(exact)}$$

と書いたりすることがある. $H \supset I$ を Hopf ideal とするとき, V は $V \xrightarrow{\lambda} V \otimes_k H \twoheadrightarrow V \otimes_k H/I$ により右 (H/I)-comodule ともなるが, このとき

$$V^{\mathrm{co}\,H/I} = \{v \in V \mid \lambda(v) - v \otimes 1 \in V \otimes_k I\}$$

である. なお, 次の可換図式を追えば $V^{\mathrm{co}\,H/I} = \lambda^{-1}(V \otimes_k H^{\mathrm{co}\,H/I})$ と書けることが分かる:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V^{\mathrm{co}\,H/I} \arrow[r] & V \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\lambda"] & V \otimes_k H/I \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & V \otimes_k H^{\mathrm{co}\,H/I} \arrow[r] & V \otimes_k H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & V \otimes_k H \otimes_k H/I & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

(λ は単射[13]なので $\lambda \otimes \mathrm{id}$ も単射であることに注意).

ここで I が normal Hopf ideal であった場合を考えてみよう. 定理 2.16 を思い出すと, H の normal Hopf ideal I と H の Hopf subalgebra H_1 が $H_1 = H^{\mathrm{co}\,H/I}$, $I = HH_1^+$ によ

[13] $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_H) \circ \lambda = \mathrm{id}$ により明らか.

り対応するのであった. $V_1 = V^{\mathrm{co}\,H/I}$ とおき, $v \in V_1$ に対し $\lambda(v) = \sum_i v_i \otimes h_i \in V \otimes_k H_1$ (ただし h_i たちは k 上線形独立) と書けているとすると,

$$\sum_i \sum_{(v_i)} (v_i)_{(0)} \otimes (v_i)_{(1)} \otimes h_i = \sum_i \sum_{(h_i)} v_i \otimes (h_i)_{(1)} \otimes (h_i)_{(2)} \in V \otimes_k H_1 \otimes_k H_1.$$

h_i たちは k 上線形独立なので, これは各 i について $v_i \in \lambda^{-1}(V \otimes_k H_1) = V_1$ となることを意味している. 従って $\lambda(V_1) \subset V_1 \otimes_k H_1$. すなわち $(V_1, \lambda|_{V_1})$ は右 H_1-comodule となる.

また, L/K を体拡大, M を中間体とするとき, M は次の意味で difference kernel である:

$$0 \to M \to L \underset{-\otimes 1}{\overset{1\otimes -}{\rightrightarrows}} L \otimes_M L \quad \text{(exact)}.$$

L-coring $L \otimes_M L$ の L への coaction を考えるなら, M は L の中の $L \otimes_M L$-coinvariants である, という言い方もできるであろう.

補題 3.34 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, M を L/K の中間 D-module field, I を M に対応する H の Hopf ideal とする. このとき $A^{\mathrm{co}\,H/I} = A \cap M$ である. (とくに $A^{\mathrm{co}\,H} = K$.) また, $\mu : A \otimes_k H \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A$ を制限して, 同型 $A \otimes_k H^{\mathrm{co}\,H/I} \xrightarrow{\sim} A \otimes_K (A \cap M)$ が得られる.

[証明] まず, 次の可換図式を追えば $A^{\mathrm{co}\,H/I} = A \cap M$ を得る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \cap M \arrow[r] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & AM \otimes_M AM & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & A^{\mathrm{co}\,H/I} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, equal] & A \otimes_k H/I \arrow[u, "\text{単射}"'] & \text{(exact).}
\end{tikzcd}$$

$A \otimes_k H^{\mathrm{co}\,H/I} \xrightarrow{\sim} A \otimes_K (A \cap M)$ については, 次の可換図式を追えば得られる:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_K A^{\mathrm{co}\,H/I} \arrow[r] & A \otimes_K A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A \otimes_K A \otimes_k H/I & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & A \otimes_k H^{\mathrm{co}\,H/I} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & A \otimes_k H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\sim"'] & A \otimes_k H \otimes_k H/I \arrow[u, "\sim"'] & \text{(exact).}
\end{tikzcd}$$

□

3.8 pointed Hopf algebra

さて, これまでは D は単に cocommutative な bialgebra とだけしてきたが, 3.9 節以降においては D にもっと強い仮定をつけて, cocommutative pointed Hopf algebra としないとうまくいかない部分がある．この小節では準備として, pointed Hopf algebra の定義や基本的な性質について解説する．(詳しい証明等は省きます[14]が, 興味のある人は「聴講ノート 2002」の６月３日と６月１０日を参照してください.)

C を coalgebra とする．実は, 前にやった定理 2.30 と同様に, C は有限次元 subcoalgebra たちの filtered union になっている．

定義 3.35 (1) $C \neq 0$ かつ C の subcoalgebra が 0 と C 自身しか存在しないとき, C は **simple coalgebra** であるという．上記で述べたことにより, simple coalgebra は必ず有限次元である．

(2) C が simple subcoalgebra を唯一つしかもたないとき, C は **irreducible coalgebra** であるという．

(3) C の simple subcoalgebra がすべて 1 次元であるとき, C は **pointed coalgebra** であるという．

$G(C) := \{g \in C \mid \Delta(g) = g \otimes g,\ \ \varepsilon(g) = 1\}$ を C の grouplike 元全体の集合とする．任意の $g \in G(C)$ に対し, kg は C の 1 次元の simple subcoalgebra である．実は, 1 次元の simple subcoalgebra はすべてこのような形をしている．

命題 3.36 C を coalgebra, S を C の simple subcoalgebra とするとき, S を含む C の irreducible subcoalgebra の中で最大のものが存在する．

[略証] S を含む C の irreducible subcoalgebra 全体の和をとると, 実はそれも irreducible subcoalgebra になっている．だからその和が求めるものである． □

定義 3.37 C を coalgebra, S を C の simple subcoalgebra とするとき, S を含む最大の irreducible subcoalgebra を C^S と書き, C における S の **irreducible component** と呼ぶ．また, $g \in G(C)$ に対しては, C^{kg} を単に C^g と書く．

命題 3.38 C が cocommutative coalgebra ならば, $C = \bigoplus_S C^S$ (S は C の simple subcoalgebra 全体をわたる).

[略証] 実は C^S たちは C の中で直和をなしており, $\bigoplus_S C^S \subset C$ となっている．C は有限次元 subcoalgebra たちの filtered union なので, あとは任意の有限次元 subcoalgebra $F \subset C$ について $F \subset \bigoplus_S C^S$ となることを示せばよい．F の dual algebra F^* は有限次元 commutative algebra だから, ある有限個の local algebra A_i $(i = 1, \ldots, n)$ によっ

[14]文章中「実は, ...」と書いてある部分の証明を省略しています.

て $F^* = \prod_{i=1}^n A_i$ と書ける[15]. これの双対をとれば, coalgebra として $F \simeq \bigoplus_{i=1}^n A_i^*$ となることが分かる (A_i^* は dual coalgebra). ここで, A_i^* の simple subcoalgebra は A_i の maximal ideal に対応する[16]ので唯一つしか存在しない. すなわち, 各 A_i^* は irreducible coalgebra である. これにより $F \subset \bigoplus_S C^S$ を得る. □

さて, D を cocommutative pointed Hopf algebra とすると, 上記の命題により $D = \bigoplus_{g \in G(D)} D^g$ となる. さらに, $D^1 \to D^g$, $d \mapsto dg$ は coalgebra isomorphism だから[17] coalgebra としては $D \simeq D^1 \otimes RG(D)$ となっていることが分かる. また実は, D^1 は D の Hopf subalgebra になる. D^1 に対する $g \in G(D)$ の作用を $d \mapsto gdg^{-1}$ $(d \in D^1)$ により定めれば[18], これにより D^1 は $RG(D)$-module algebra となる. そこで smash 積 $D^1 \# RG(D)$ を考えれば, algebra としては $D \simeq D^1 \# RG(D)$ であることが分かる.

定理 3.39 D を cocommutative pointed Hopf algebra とすると,

$$D \simeq D^1 \otimes RG(D) \quad (\text{coalgebra として}), \quad D \simeq D^1 \# RG(D) \quad (\text{algebra として}).$$

注意 3.40 実は, 基礎体 R の標数が 0 であるとき, H を R 上の cocommutative irreducible Hopf algebra とし, $P(H)$ を H の primitive 元全体のなす Lie algebra とすると, $H \simeq U(P(H))$ (Hopf algebra として) となることが知られている (Sweedler, "Hopf Algebras" の Theorem 13.0.1, または Abe, "Hopf Algebras" の Theorem 2.5.3). だから, 標数 0 の体上では cocommutative pointed Hopf alebra には例 3.8 のタイプのものしか存在しない. しかし正標数の場合はもっと話は複雑で, 例えば 3.12 節で解説する Birkhoff-Witt タイプのものとか, restricted universal enveloping algebra などもあるので一概には言えない.

補題 3.41 C を cocommutative pointed coalgebra とする (このとき $C = \bigoplus_{g \in G(C)} C^g$). A を algebra (可換でなくてもよい) とするとき, $f \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$ が ($*$-積に関して) 可逆元であることと, すべての $g \in G(C)$ について $f(g)$ が A の可逆元であることが同値である.

[参考] Sweedler, "Hopf Algebras" の Lemma 9.2.3 と Corollary 9.2.4, または Abe, "Hopf Algebras" の Lemma 2.4.25 と Corollary 2.4.26 を参照してください. 証明中に wedge 積の記号 $\wedge$ (Abe の本では $\sqcap$) が出てきますが, これについては「聴講ノート 2002」の６月１７日や６月２４日にも書いてあります. □

以下, D を cocommutative pointed Hopf algebra とする.

[15] これはよく知られていますが, 例えば Waterhouse の本の Chapter 6 最初の Lemma を参照してください.

[16] A_i^* の subcoalgebra 全体と A_i の ideal 全体とは $S \leftrightarrow S^\perp$ により 1:1 に対応する. この対応において, S が simple subcoalgebra であることと $S^\perp$ が maximal ideal であることが同値になる.

[17] ただし, $dg \in D^g$ となることはそんなに明らかではありません. そこは省略しています.

[18] 先程同様, $gdg^{-1} \in D^1$ となることの説明は省略しています.

補題 3.42 A を D-module algebra, $S \subset A$ を零因子を含まない乗法的集合とし, S は $G(D)$-stable であると仮定する. このとき A の D-module algebra 構造は $S^{-1}A$ に一意的に拡張される.

[証明] 次の (ii)(i) を示せばよい (番号は本稿の最初に書いた D-module algebra の定義に合わせている):

(ii) algebra map $\rho_A : A \to \mathrm{Hom}_R(D, A) \subset \mathrm{Hom}_R(D, S^{-1}A)$ は, $S^{-1}A$ からの algebra map $\tilde{\rho} : S^{-1}A \to \mathrm{Hom}_R(D, S^{-1}A)$ に一意的に拡張される.

(i) $\tilde{\rho}$ により induce される $S^{-1}A$ への D-action

$$d(a/s) := \tilde{\rho}(a/s)(d) \quad (d \in D,\ a \in A,\ s \in S)$$

は結合律を満たし, これにより $S^{-1}A$ が左 D-module になる.

(ii) すべての $s \in S$ に対し, $\rho_A(s)$ が $\mathrm{Hom}_R(D, S^{-1}A)$ において可逆元になっていることを示せばよい. S は $G(D)$-stable なので, 任意の $g \in G(D)$ に対し $\rho_A(s)(g) = gs$ は S の元であり, 従って $S^{-1}A$ の可逆元である. よって補題 3.41 により, $\rho_A(s)$ は $\mathrm{Hom}_R(D, S^{-1}A)$ の可逆元であることが分かる.

(i) 任意の $s \in S$ に対し $c(d(1/s)) = (cd)(1/s)$ ($^\forall c, d \in D$) となることを示せば十分である. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(D \otimes D, S^{-1}A)$ を $\varphi(c \otimes d) = c(d(1/s))$, $\psi(c \otimes d) = (cd)(1/s)$ により定める. すると φ と ψ はいずれも $[c \otimes d \mapsto c(ds) = (cd)s] \in \mathrm{Hom}_R(D \otimes D, S^{-1}A)$ の ($*$-積に関する) 逆元である. 実際, $\sum (d_1(1/s))(d_2 s) = (\tilde{\rho}(1/s) * \tilde{\rho}(s))(d) = \varepsilon(d)1$ となることに注意すれば, φ に関しては

$$\begin{aligned} \sum (c_1(d_1(1/s)))(c_2(d_2 s)) &= \sum (\tilde{\rho}(d_1(1/s)) * \tilde{\rho}(d_2 s))(c) = \sum (\tilde{\rho}((d_1(1/s))(d_2 s)))(c) \\ &= \tilde{\rho}(\varepsilon(d)1)(c) = \varepsilon(c)\varepsilon(d)1. \end{aligned}$$

ψ に関しては単純に $\sum ((c_1 d_1)(1/s))((c_2 d_2)(s)) = (\tilde{\rho}(1/s) * \tilde{\rho}(s))(cd) = \varepsilon(cd)1$. よって $\varphi = \psi$ を得る. □

補題 3.43 L を D-module field, B を L の D-module subalgebra とする. また, $S \subset B$ を 0 を含まない $G(D)$-stable な乗法的集合とする. $F = S^{-1}B \subset L$ とすると, F は L の D-module subalgebra となる. (つまり, 補題 3.42 によって F に拡張された D-action が L の D-action と一致する.)

[証明] 補題 3.42 により, ρ_B は $\tilde{\rho} : F \to \mathrm{Hom}_R(D, F)$ に一意に拡張されて, これにより F に D-module algebra 構造が入る. $\mathrm{Hom}_R(D, B) \subset \mathrm{Hom}_R(D, F) \subset \mathrm{Hom}_R(D, L)$ とみなすとき, 任意の $b \in B$ について $\rho_L(b) = \rho_B(b) = \tilde{\rho}(b)$ である. そして, 示す

べき主張は $\rho_L(b/s) = \tilde{\rho}(b/s)$ ($^\forall b \in B$, $^\forall s \in S$) と同値である．任意の $s \in S$ について, $\rho_L(1/s)$ は $\mathrm{Hom}_R(D, L)$ における $\rho_B(s)$ の逆元である．しかし $\rho_B(s)$ の逆元は $\mathrm{Hom}_R(D, F)$ の中にすでに存在し, それは $\tilde{\rho}(1/s)$ であったから, $\rho_L(1/s) = \tilde{\rho}(1/s)$ でなければならない．以上より, $\rho_L(b/s) = \tilde{\rho}(b/s)$ ($^\forall b \in B$, $^\forall s \in S$) を得る． □

3.9 Picard-Vessiot 拡大の Galois 対応 II

この小節以降 3.13 節までずっと, D は cocommutative pointed Hopf algebra であると仮定する．

定理 3.44 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とする．H_1 を H の Hopf subalgebra, $I = HH_1^+$ を H_1 に対応する H の normal Hopf ideal とし, $A_1 = A^{\mathrm{co}\,H/I} = \theta^{-1}(A \otimes_k H_1)$ とおく．また, I に対応する L/K の中間 D-module field を M とする．このとき補題 3.34 により $A_1 = A \cap M$ となる．それから, A_1 の商体を L の中にとり, それを L_1 とおく．補題 3.43 により L_1 も L/K の中間 D-module field になる．このとき次の (1)–(3) が成立する:

(1) $(L_1/K, A_1, H_1)$ は Picard-Vessiot 拡大である．

(2) $L_1 = M$.

(3) $H_1 \mapsto L_1$ により, H の Hopf subalgebra 全体と, L/K の中間 D-module algebra のうち K 上で Picard-Vessiot 拡大になるもの全体とが bijective に対応する．

[証明] (1) $A \otimes_K A$ を $\mathrm{id}_A \otimes \theta$ により右 H-comodule とみなす．このとき $(\mathrm{id}_A \otimes \theta)|_H = \Delta_H$ に注意すれば H は $A \otimes_K A$ の H-subcomodule であることが分かる．よって, $H_1 = H^{\mathrm{co}\,H/I} \subset A \otimes_K A^{\mathrm{co}\,H/I} = A \otimes_K A_1$. さらに $H_1 = S_H(H_1) \subset \mathrm{tw}(A \otimes_K A_1) = A_1 \otimes_K A$ であるから, 結局 $H_1 \subset A_1 \otimes_K A_1$ を得る．従って $\mu(A_1 \otimes_k H_1) \subset A_1 \otimes_K A_1$ となる．一方, 3.7 節で考察したように $\theta(A_1) \subset A_1 \otimes_k H_1$ であるから ${}_A\theta(A_1 \otimes_K A_1) \subset A_1 \otimes_k H_1$, すなわち $A_1 \otimes_K A_1 \subset \mu(A_1 \otimes_k H_1)$ である．よって μ を制限することにより D-module algebra isomorphism $A_1 \otimes_k H_1 \xrightarrow{\sim} A_1 \otimes_K A_1$ を得る．これにより $H_1 = (A_1 \otimes_K A_1)^D$ および $A_1 \otimes_K A_1 = A_1 \cdot H_1$ となることが分かる．

(2) L_1 は A_1 を含む L の D-module subfield のうち最小のものであり, 一方 $M \supset A \cap M = A_1$ であるから, $L_1 \subset M$ を得る．I' を L_1 に対応する H の Hopf ideal とする．H_1 の counit は積 $A_1 \otimes_K A_1 \to A_1$ の制限だから, $H_1^+ \subset \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_{L_1} L)$ である．よって, $I = HH_1^+ \subset H \cap \mathrm{Ker}(L \otimes_K L \twoheadrightarrow L \otimes_{L_1} L) = I'$. これは $M \subset L_1$ を意味する．

(3) F を L/K の中間 D-module field とし, F/K が Picard-Vessiot 拡大であったとする．F/K の principal algebra を A', Picard-Vessiot Hopf algebra を H' とおく．このとき H' が H の Hopf subalgebra となることと $A' = \theta^{-1}(A \otimes_k H')$ となることを示

せばよい. まず, $A \otimes_K A = A \cdot H$, $A' \otimes_K A' = A' \cdot H'$ より, $A'A \otimes_K A'A = A'A \cdot H'H$ を得る. よって $A'A$ は L/K の principal algebra となるから, 一意性により $A'A = A$. 従って $A' \subset A$, $H' \subset H$ であり, H' が H の Hopf subalgebra であることが分かる. また, $A' \otimes_k H' \xrightarrow{\sim} A' \otimes_K A'$ から左 A-module isomorphism $A \otimes_k H' \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A'$ が induce されるが, これは $\mu : A \otimes_k H \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A$ の $A \otimes_k H'$ への制限と一致する. よって, $a \in \theta^{-1}(A \otimes_k H') \Leftrightarrow \mu^{-1}(1 \otimes a) \in A \otimes_k H' \Leftrightarrow 1 \otimes a \in \mu(A \otimes_k H') = A \otimes_K A' \Leftrightarrow a \in A'$. すなわち $A' = \theta^{-1}(A \otimes_k H')$ を得る. □

定理 3.44 を affine group scheme の言葉で言い換えれば次のようになる:

定理 3.45 L/K を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $\mathbf{G}(L/K)$ をその Picard-Vessiot group scheme とする. M を L/K の中間 D-module field とするとき, M/K が Picard-Vessiot 拡大であることと $\mathbf{G}(L/M)$ が $\mathbf{G}(L/K)$ の closed normal subgroup scheme であることは同値である. またそのとき, $\mathbf{G}(M/K) \simeq \mathbf{G}(L/K)/\mathbf{G}(L/M)$ となる.

3.10 方程式系の解空間と分解体

前回に引き続き D は cocommutative pointed Hopf algebra としますが, この小節に限っていえば pointed である必要はありません. まず, 方程式とその解空間について, 少し前置きをしてから本論に入ることにします.

A を D-module algebra とし, A と D の smash 積 $A\#D$ を A 係数の線形 (D-) 作用素の環と思うことにする. $P_1, \ldots, P_n \in A\#D$, u を未知関数として, A 係数の線形 (D-) 方程式系

$$P_i u = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

を考えよう. これに対し, $P_1, \ldots, P_n$ で生成される $A\#D$ の左 ideal $I = \sum_{i=1}^{n}(A\#D)P_i$ をとり, $A\#D$ を I で割った左 $A\#D$-module $V = A\#D/I$ をとると, この V が方程式系 (3.3) の代数的な構造を表す[19]. 例えば, V がある二つの $A\#D$-submodule V_1, V_2 の直和となるならば, それは (3.3) がもっと簡単な方程式系の組に分解することを示唆する[20].

さて, (3.3) の解が A の中に十分にないときは, 拡大 D-module algebra $B \supset A$ を考えて, B の中で解を探すことになる. B の中における (3.3) の解全体は次により $\mathrm{Hom}_{A\#D}(V, B)$ と対応する:

$$\mathrm{Hom}_{A\#D}(V, B) \xrightarrow{\sim} \{f \in B \mid P_i f = 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)\}, \quad \varphi \mapsto \varphi(1 \bmod I)$$

[19] たとえるなら, $f(x) = 0$ を体 K 上の代数方程式とするときに, 多項式環 $K[x]$ を ideal $I = \langle f(x) \rangle$ で割った剰余環 $k[x]/I$ がもとの方程式の代数的な構造を表すのと同様です.

[20] さっきの代数方程式のたとえでいうと, これは $K[x]/I$ がある二つの subring の直和になっていること—つまり $f(x)$ が二つの互いに素な多項式の積に分解されること—に相当します.

(逆写像は $f \mapsto [(P \bmod I) \mapsto Pf]$). これは B^D-module としての同型である. この意味で $\mathrm{Hom}_{A\#D}(V,B)$ は V の B における解空間と同一視できる. ここで例えば $V = V_1 \oplus V_2$ であったなら, $\mathrm{Hom}_{A\#D}(V,B) \simeq \mathrm{Hom}_{A\#D}(V_1,B) \oplus \mathrm{Hom}_{A\#D}(V_2,B)$ であるから, V の解空間は V_1 と V_2 の解空間の直和になる. よってこの場合, (3.3) の一般解は V_1 の解と V_2 の解を使って表される.

イメージがつかめない人は, 次の非常に簡単な微分方程式の問題を解きながら読み直してみてください:

演習 3.46 関数 $u(x)$ についての 2 階常微分方程式 $u''(x) + 2u'(x) - 3u(x) = 0$ が二つの 1 階常微分方程式の組に分解することを確かめ, この方程式の一般解を求めよ.

では前置きはここまでにして, 本論に入っていくことにしよう. B を D-module algebra, A を B の D-module subalgebra とする. V を左 $A\#D$-module, W を左 $B\#D$-module とするとき, $\mathrm{Hom}_A(V,W)$ には次により左 $B\#D$-module の構造が入る:

$$((b\#d)\varphi)(v) = b\sum d_1(\varphi(S(d_2)v)) \quad (b \in B,\ d \in D,\ \varphi \in \mathrm{Hom}_A(V,W),\ v \in V)$$

(ここで, S は D の antipode). このとき $\mathrm{Hom}_A(V,W)^D = \mathrm{Hom}_{A\#D}(V,W)$ である. とくに, V の B における解空間 $\mathrm{Hom}_{A\#D}(V,B)$ は $\mathrm{Hom}_A(V,B)^D$ と一致する.

演習 3.47 上記を確かめよ[21] (cf. 竹内 [1] の Proposition 1.8).

さて, L/K を D-module field の拡大, V を左 $K\#D$-module とし, $\dim_K V = r < \infty$ であったとする. この r を V の rank と呼ぶ (常微分方程式でいうと階数にあたる). このとき, L における V の解空間 $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)$ の L^D 上の次元は V の rank を超えない:

補題 3.48 $\dim_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L) \leq \dim_K V$.

[証明] $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L) = \mathrm{Hom}_K(V,L)^D$ だから, 系 3.15 により,

$$L \otimes_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L) \to \mathrm{Hom}_K(V,L), \quad a \otimes f \mapsto af$$

は単射 L-linear map である. この両者の L 上の次元を比較すれば結論を得る. □

ということは, もし $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)$ の L^D 上の次元が V の rank r と一致するならば, L は V の解を十分たくさんもっているといえる. このとき V **は** L/K **で分解する** (V **splits in** L/K) という. 実は, 次の命題でみるように, この条件にはいくつか異なる表現方法がある.

[21] [ヒント] まずは $D = RG$ (G は群) のときに考えてみると分かりやすいかもしれません. 示すべきは次の三つです: (1) $^\forall g \in G$ に対し, $g\varphi = [v \mapsto g(\varphi(g^{-1}v))]$ が A-linear であること, (2) 結合律 $g(h\varphi) = (gh)\varphi$ が成り立つこと, (3) $g\varphi = \varphi$ ($^\forall g \in G$) $\Leftrightarrow$ $\varphi(gv) = g(\varphi(v))$ ($^\forall g \in G$, $^\forall v \in V$). 一般の D については antipode の諸性質 (命題 1.31, 命題 1.32) を思い出して.

命題 3.49 L/K を D-module field の拡大, V を左 $K\#D$-module とし, $\dim_K V = r < \infty$ であったとする. このとき次の (a)–(f) は同値:

(a) $\dim_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) = r$.
(b) $L \otimes_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, L)$, $a \otimes f \mapsto af$.
(c) $\mathrm{Hom}_K(V, L)$ は $L\#D$-module として L^r と同型である.
(d) $\dim_{L^D}(L \otimes_K V)^D = r$.
(e) $L \otimes_{L^D} (L \otimes_K V)^D \xrightarrow{\sim} L \otimes_K V$, $a \otimes_{L^D} (b \otimes_K v) \mapsto ab \otimes_K v$.
(f) $L \otimes_K V$ は $L\#D$-module として L^r と同型である.
(g) ある自然数 n があって, 単射 $L\#D$-module map $L \otimes_K V \hookrightarrow L^n$ が存在する.

[証明] 補題 3.48 で考えた単射 $L\#D$-module map を $\varphi : L \otimes_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) \to \mathrm{Hom}_K(V, L)$ とすると, (b) は φ が全射であることと同値である. 次元を比較すれば, (a) $\Leftrightarrow$ φ が全射 $\Leftrightarrow$ (b). そして (a)(b) $\Leftrightarrow$ (c) は明らかである. また, $L \otimes_{L^D} (L \otimes_K V)^D \to L \otimes_K V$ も単射だから, 同様に (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f) を得る.

さて, $L \otimes_K V$ は有限次元 L-ベクトル空間なので, $L \otimes_K V \simeq \mathrm{Hom}_L(\mathrm{Hom}_K(V, L), L)$ (L-ベクトル空間として) となるから, φ の転置 L-線形写像は

$$\varphi^* : L \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_{L^D}(\mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L), L), \quad a \otimes v \mapsto [f \mapsto af(v)] \tag{3.4}$$

と同一視できる. よって, (b) はこの φ^* が単射であることとも同値である[22]. ここで, $n = \dim_{L^D} \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ とする. 演習 3.47 のところで考察した議論を $A = L^D$, $B = L$ に対して適用すれば, $L\#D$-module として $\mathrm{Hom}_{L^D}(\mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L), L) \simeq L^n$ で, さらに φ^* は $L\#D$-module map $L \otimes_K V \to L^n$ と同一視される. これにより (a)(b) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (g) を得る.

逆に (g) が成り立つとするとき, $f_i \in \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L) = \mathrm{Hom}_{L\#D}(L \otimes_K V, L)$ を $f_i : L \otimes_K V \hookrightarrow L^n \xrightarrow{\mathrm{proj}_i} L$ により定める ($i = 1, \ldots, n$). そうすると, 任意の $w \in L \otimes_K V$ について $\varphi^*(w) = 0 \Rightarrow f_i(w) = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) $\Rightarrow w = 0$ となり, φ^* が単射であることが分かる. $\square$

ここで, 「分解」という言葉の語感によくマッチするのは (c)(f)(g) であるが, とくに (g) を, V が K 上無限次元の場合にも拡張して, 改めてそれを V が L/K で分解することの定義としよう:

定義 3.50 K を D-module field, V を $K\#D$-module とする. L を K の拡大 D-module field とするとき, V **が** L/K **で分解する** (V **splits in** L/K) とは, $L \otimes_K V$ からある index set Λ による L の冪 L^Λ への単射 $L\#D$-module map $L \otimes_K V \hookrightarrow L^\Lambda$ が存在することをいう.

[22] 命題 3.18 の証明のところに書いてある脚注を参照.

またここで, K と $\sum_{f\in \mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)} f(V)$ を含む最小の L の D-module subfield を $K\langle V\rangle$ と書く. もし V が L/K で分解し, かつ $L=K\langle V\rangle$ となるなら, L/K を V の **最小分解体** (**minimal splitting field**[23]) と呼ぶ.

注意 3.51 命題 3.49 の証明後半と同様に考えれば, V が L/K で分解することと (3.4) が単射であることが同値となることがわかる.

補題 3.52 L/K を D-module field の拡大, V を $K\#D$-module とする.

(1) V が L/K で分解するとき, V の任意の $K\#D$-submodule も L/K で分解する.

(2) V が L/K で分解するなら, $K\langle V\rangle/K$ でも分解する.

(3) W を V の $K\#D$-submodule, $\dim_K W<\infty$ とする. このとき, もし V が L/K で分解するなら, restriction $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)\to \mathrm{Hom}_{K\#D}(W,L)$ は全射である. (よって $K\langle W\rangle\subset K\langle V\rangle$.)

[証明] (1) W を V の $K\#D$-submodule とすると, $L\otimes_K W\hookrightarrow L\otimes_K V\hookrightarrow L^\Lambda$.

(2) $V\to L^\Lambda$ の image が $K\langle V\rangle^\Lambda$ に含まれるので, $L\otimes_K V\hookrightarrow L^\Lambda$ を制限すれば $K\langle V\rangle\otimes_K V\hookrightarrow K\langle V\rangle^\Lambda$ を得る.

(3) 次の $L\#D$-module map を考える:

$$\varphi_W : L\otimes_{L^D}\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)\to \mathrm{Hom}_K(W,L),\quad a\otimes f\mapsto af|_W.$$

これの転置写像は

$$L\otimes_K W\hookrightarrow L\otimes_K V\to \mathrm{Hom}_{L^D}(\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L),L),\quad a\otimes w\mapsto [f\mapsto af(w)]$$

と同一視できるが, 注意 3.51 によりこれは単射となる. 従って φ_W は全射で, これにより結論が従う. □

3.11 方程式系の最小分解体としての Picard-Vessiot 拡大の特徴づけ

定義 3.53 L/K を D-module field の拡大とする.

(1) $u_1,\dots,u_n$ を有限個の L の元とするとき, K と $u_1,\dots,u_n$ を含む最小の L の D-module subfield を $K\langle u_1,\dots,u_n\rangle$ と書く. もしある $u_1,\dots,u_n\in L$ があって $L=K\langle u_1,\dots,u_n\rangle$ となるなら, 拡大 L/K は **finitely generated** であるという.

[23] 本当は, V が L/K で分解するときに splitting field, さらに $L=K\langle V\rangle$ が満たされるときに minimal splitting field と呼んで, 'minimal' の有無により用語を使い分けたい ([1][2] ではそうしています) のですが, minimal をつけない 'splitting field' を最小分解体の意味で使うのが普通のようなので, そういう使い分けは一般的ではないかもしれません. 本稿では minimal をつけないで splitting field ということはやめて, 前者は「V が L/K で分解」(V splits in L/K) で統一することにしました.

(2) $K\#D$-module V が **cyclic** であるとは, ある $u \in V$ が存在して $V = (K\#D)u$ と書けることをいう.（これは V が未知関数 1 個に関する方程式系 (3.3) に対応することに相当する[24].)

(3) $X = (x_{ij})_{i,j} \in \mathbf{GL}_n(L)$ が (K 上) $\mathbf{GL}_n$**-primitive** であるとは, 任意の $d \in D$ に対し, $(dX)X^{-1} \in M_n(K)$ (ここで, $dX = (dx_{ij})_{i,j}$) となることをいう.

定理 3.54 L/K を D-module field の拡大, $L^D = K^D$ $(=: k)$ であったと仮定する. このとき次の (a)–(d) は同値である:

(a) L/K は finitely generated な Picard-Vessiot 拡大.

(b) L/K はある K 上有限次元な cyclic $K\#D$-module の最小分解体.

(c) L/K はある K 上有限次元な $K\#D$-module の最小分解体.

(d) ある $\mathbf{GL}_n$-primitive な $X = (x_{ij})_{i,j} \in \mathbf{GL}_n(L)$ が存在して $L = K\langle x_{ij}\rangle = K(x_{ij})$.

[証明] ((a) $\Rightarrow$ (b)) L/K の prinicipal algebra を A, Picard-Vessiot Hopf algebra を H とする. L/K は finitely generated で, L は A の商体だから, ある有限個の $x_1, \ldots, x_l \in A$ が存在して $L = K\langle x_1, \ldots, x_l\rangle$ と書ける. A は右 H-comodule だから, 定理 2.30 より, ある k 上有限次元な H-subcomodule $U \subset A$ で $x_1, \ldots, x_l \in U$ を満たすものが存在する. そこで, $u_1, \ldots, u_m$ を U の k-basis とすれば, $L = K\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$ とも書ける. ここで $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in A^m$ とおき, $\boldsymbol{u}$ で生成される A^m の cyclic $K\#D$-submodule を $V = (K\#D)\boldsymbol{u}$ とおく. $L \otimes_k (L \otimes_K A^m)^D = L \otimes_k H^m \simeq L \otimes_K A^m$ だから A^m は L/K で分解し, 従って V も L/K で分解する. 他方, $\mathrm{proj}_i : A^m \to A \subset L$ を V に制限した $\mathrm{proj}_i|_V \in \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ $(i = 1, \ldots, m)$ を考えれば $L = K\langle u_1, \ldots, u_m\rangle = K\langle V\rangle$ となることが分かる. よって L/K は V の最小分解体である.

後は $\dim_K V < \infty$ を示せばよい. $u_1, \ldots, u_m$ は k 上線形独立なので, 命題 3.18 により, ある $h_1, \ldots, h_m \in D$ が存在して $(h_i u_j)_{i,j} \in \mathbf{GL}_n(L)$ となる. 以下, $W = (h_i u_j)_{i,j}$ とおき, 任意の $d \in D$ に対して $(d\boldsymbol{u})W^{-1} \in K^m$ となることを示そう. それを示せば, $V = K(h_1\boldsymbol{u}) + \cdots + K(h_m\boldsymbol{u})$ がいえて証明が終わる. $u_1, \ldots, u_m$ は A の H-subcomodule U の k-basis であったから, ある $z_{sj} \in H$ $(s, j = 1, \ldots, m)$ があって

$$\theta(u_j) = \sum_{s=1}^{m} u_s \otimes_k z_{sj} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

と書ける. この式の両辺を $\mu : A \otimes_k H \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A$ で移せば,

$$1 \otimes_K u_j = \sum_{s=1}^{m} (u_s \otimes_K 1) z_{sj} \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

[24]「相当する」と書きましたが, 完全に同じではありません. 完全に同じであるためには $K\#D$ が左 Noether である必要があります. ただ, 線形微分作用素環や線形差分作用素環の場合は, 例えばグレブナ基底をとれば良いので, 左 Noether です.

となるが, さらに両辺に h_i $(i=1,\dots,m)$ を作用させると

$$1 \otimes_K h_i u_j = \sum_{s=1}^{m} (h_i u_s \otimes_K 1) z_{sj} \quad (i,j = 1,\dots,m)$$

を得る. すなわち, $Z = (z_{sj})_{s,j}$ とすれば, $1 \otimes_K W = (W \otimes_K 1)Z$. この両辺に左から $W^{-1} \otimes_K 1$ をかければ,

$$Z = (W^{-1} \otimes_K 1)(1 \otimes_K W) \in \mathbf{GL}_m(L \otimes_K L)$$

を得る. 他方, 任意の $d \in D$ に対し, (3.5) の両辺に d を作用させれば

$$1 \otimes_K (d\boldsymbol{u}) = ((d\boldsymbol{u}) \otimes_K 1)Z$$

となることが分かる. この式の両辺に右から $1 \otimes_K W^{-1} = Z^{-1}(W^{-1} \otimes_K 1)$ をかければ,

$$1 \otimes_K (d\boldsymbol{u})W^{-1} = (d\boldsymbol{u})W^{-1} \otimes_K 1$$

を得る. これは $(d\boldsymbol{u})W^{-1} \in K^m$ を意味する.

((b) $\Rightarrow$ (c)) 明らか.

((c) $\Rightarrow$ (d)) L/K が K 上有限次元な $K\#D$-module V の最小分解体であったとする. $n = \dim_K V$ とおき, V の K-basis $v_1,\dots,v_n$ および $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V,L)$ の k-basis $f_1,\dots,f_n$ をとる. そして $x_{ij} = f_j(v_i)$ $(i,j=1,\dots,n)$ とおく. (これらは L の中における V の解にあたる.) L の最小性により $L = K\langle V\rangle = K\langle x_{ij}\rangle$ である. また $X = (x_{ij})_{i,j}$ とすると, これは L-線形同型写像 (3.4) の表現行列だから $X \in \mathbf{GL}_n(L)$ である. 任意の $d \in D$ に対し, $(dv_1,\dots,dv_n) = (v_1,\dots,v_n)T_d$ となる $T_d \in M_n(K)$ をとる (線形方程式系 V の行列表示). すると, $f_1,\dots,f_n$ は $K\#D$-linear だから, $dX = {}^tT_d X$. よって X は $\mathbf{GL}_n$-primitive であり, $K\langle x_{ij}\rangle = K(x_{ij})$.

((d) $\Rightarrow$ (a)) $A = K[x_{ij}, 1/\det X]$ とし, これが principal algebra の条件を満たすことを示す. まず $Y = X^{-1}$ とおいて $X(dY) \in M_n(K)$ $({}^\forall d \in D)$ を示そう ($Y = (y_{ij})_{i,j}$ とおけば $A = K[x_{ij}, y_{ij}]$ だから, これがいえれば A が L の D-module subalgebra であることが分かる[25]). $\psi \in \mathrm{Hom}_R(D, M_n(L))$ を $\psi(d) = X(dY)$ により定め, また, $\phi \in \mathrm{Hom}_R(D, M_n(K))$ を $\phi(d) = (dX)Y$ $(= (dX)X^{-1} \in M_n(K))$ により定める. このとき $\mathrm{Hom}_R(D, M_n(L))$ の $*$-積に関して ψ は ϕ の逆元となる ($\sum(d_1X)(d_2Y) = d(XY) = \varepsilon(d)E_n = d(YX) = \sum(d_1Y)(d_2X)$ に注意). ここで, 任意の $g \in G(D)$ に対し, $\phi(g)^{-1} = X(gY) = g((g^{-1}X)Y)$ で, $(g^{-1}X)Y \in M_n(K)$ だから $\phi(g)^{-1} \in M_n(K)$ を得る. よって補題 3.41 により ϕ は $\mathrm{Hom}_R(D, M_n(K))$ において逆元をもつはずである. そしてそれは ψ と一致しなければならない. 故に $\psi \in \mathrm{Hom}_R(D, M_n(K))$ を得る.

さて, A の商体は $K(x_{ij})$ だから, 仮定より L と一致する. また,

$$Z := X^{-1} \otimes_K X \ (= (X^{-1} \otimes_K 1)(1 \otimes_K X)) \ \in \mathbf{GL}_n(A \otimes_K A)$$

[25] A が L の D-module subalgebra であること自体は補題 3.42 を使えばもっと簡単に分かりますが.

とすると, 任意の $d \in D$ に対して

$$dZ = \sum (d_1 Y) \otimes_K (d_2 X) = \sum Y\psi(d_1) \otimes_K \phi(d_2) X = \sum X^{-1} \otimes_K \psi(d_1)\phi(d_2) X = \varepsilon(d) Z.$$

よって Z の各成分は $(A \otimes_K A)^D =: H$ の元である. 同様に $Z^{-1} = (1 \otimes_K X^{-1})(X \otimes_K 1)$ の各成分も H の元であり, 従って $Z \in \mathbf{GL}_n(H)$ となることが分かる. すると $1 \otimes_K X = X \cdot Z \in \mathbf{GL}_n(A \cdot H)$ だから, これにより $A \otimes_K A = A \cdot H$ を得る. 以上により $(L/K, A, H)$ が Picard-Vessiot 拡大であることがいえた. □

注意 3.55 (Picard-Vessiot group scheme の行列表示) 上記証明において $Z = (z_{ij})_{i,j}$ とおき $H' = k[z_{ij}, 1/\det Z] \subset H$ とすると, $A \otimes_K A = A \cdot H'$ となる. これは $A \otimes_k H' \hookrightarrow A \otimes_k H \xrightarrow{\sim} A \otimes_K A$ の全射性を意味するから, 結局 $H = H' = k[z_{ij}, 1/\det Z]$ であることが分かる. また A の右 H-comodule 構造 $\theta : A \to A \otimes_k H$ を考えると,

$$\theta(X) = \mu^{-1}(1 \otimes_K X) = \mu^{-1}(X \cdot Z) = X \otimes_k Z$$

となる. ここで $\mathbf{GL}_n$ の座標環を $k[\mathbf{GL}_n] = k[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})_{i,j}]$ と書けば, 定理 2.30 の証明と同様に全射 Hopf algebra map $k[\mathbf{GL}_n] \twoheadrightarrow H$, $X_{ij} \mapsto z_{ij}$ が得られる. これに対応する affine group scheme の closed embedding を $\Xi : \mathbf{G}(L/K) \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ とおこう[26].

また, 3.6 節でとった $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ を考えて, $T \in {}_k\mathcal{A}$ と $f \in \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T/K \otimes_k T)$ に対して

$$\Psi_T(f) := X^{-1} f(X) \ (= (X^{-1} \otimes_k 1) \cdot f(X \otimes_k 1))$$

とおくと, $\Psi_T(f) \in \mathbf{GL}_n(T)$ となる[27]. 実際, $\Psi_T(f)$ は, D-module algebra map ${}_A f : A \otimes_K A \to A \otimes_k T$, $a \otimes_K b \mapsto af(b \otimes_k 1)$ による Z の像と一致する (${}_A f(Z) = {}_A f(X^{-1} \otimes_K X) = X^{-1} f(X)$) ので, 各成分は $(A \otimes_k T)^D = T$ に入っている. また, $f(X) = X \otimes_k \Psi_T(f)$ に注意すれば, 任意の $f, g \in \mathrm{Aut}_D(A \otimes_k T/K \otimes_k T)$ に対し,

$$(f \circ g)(X) = f(X \otimes_k \Psi_T(g)) = f(X)\Psi_T(g) = X \otimes_k \Psi_T(f)\Psi_T(g),$$

よって $\Psi_T(f \circ g) = \Psi_T(f)\Psi_T(g)$. これにより homomorphism $\Psi : \mathbf{Aut}_D(A/K) \to \mathbf{GL}_n$ が得られる. 明らかに $\mathrm{Ker}\,\Psi = \{e\}$ だから[28], Ψ は closed embedding である.

さらにここで定理 3.33 の同型をとり $\Phi : \mathbf{Aut}_D(A/K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(L/K)$ とすると, $\Psi_H(\Phi_H(\mathrm{id}_H)) = \Psi_H({}_A\theta) = {}_A\theta(Z) = Z = \Xi_H(\mathrm{id}_H)$ だから, 米田の補題により次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(L/K) \arrow[rr, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[dr, "\Xi"'] & & \mathbf{Aut}_D(A/K) \arrow[dl, "\Psi"] \\
& \mathbf{GL}_n &
\end{tikzcd}.$$

[26] これは, 線形方程式系 V の解空間に対する $\mathbf{G}(L/K)$ の作用を行列表示していることに相当する.
[27] こちらは, V の解空間に対する $\mathbf{Aut}_D(A/K)$ の作用を行列表示していることに相当する.
[28] A は X の成分により K 上生成されているので, $f(X) = X \Leftrightarrow f = \mathrm{id}$.

系 3.56 (1) $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大とする．このとき次の (a)–(d) は同値である．

(a) L/K が D-module field の拡大として finitely generated.

(b) L/K が通常の体拡大として finitely generated.

(c) A が K-algebra として finitely generated.

(d) H が k-algebra として finitely generated ($\Leftrightarrow$ $\mathbf{G}(L/K)$ が algebraic).

(2) L/K が finitely generated な Picard-Vessiot 拡大のとき, その中間 Picard-Vessiot 拡大 M/K もすべて finitely generated である．

(3) $(L/K, A, H)$ を finitely generated な Picard-Vessiot 拡大とするとき, L/K の超越次数 $\mathrm{tr.deg}_K L$ と A の Krull 次元 $\mathrm{Kdim}(A)$, および H の Krull 次元 $\mathrm{Kdim}(H)$ $(= \dim \mathbf{G}(L/K))$ はすべて一致する．

[証明] (1) (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) は定理 3.54 (の証明) により直ちに従う．(c) $\Leftrightarrow$ (d) は $L \otimes_K A \simeq L \otimes_k H$ による．

(2) 一般に, finitely generated commutative Hopf algebra の Hopf subalgebra は finitely generated である[29].

(3) $\mathrm{tr.deg}_K L = \mathrm{Kdim}(A)$ は可換環論における次元の一般論による (例えば Matsumura, "Commutative Algebra" の Ch. 5, §14 を参照). $\mathrm{Kdim}(A) = \mathrm{Kdim}(H)$ はまた $L \otimes_K A \simeq L \otimes_k H$ により従う． $\square$

K を D-module field とするとき, ある $K\#D$-module V が **locally finite** であるとは, 任意の $v \in V$ に対して v により生成される cyclic $K\#D$-submodule $(K\#D)v$ が K 上有限次元であることをいう．これは V が K 上有限次元な $K\#D$-submodule たちの filtered union であることと同値である．

系 3.57 L/K を D-module field の拡大, $L^D = K^D$ $(=: k)$ と仮定する．このとき L/K が Picard-Vessiot 拡大 $\Leftrightarrow$ L/K がある locally finite な $K\#D$-module の最小分解体．

[証明] ($\Rightarrow$) H を L/K の Picard-Vessiot Hopf algebra とする．定理 2.31 により H は k 上 finitely generated な Hopf subalgebra H_λ たちの filtered union になっている: $H = \bigcup_\lambda H_\lambda$. 定理 3.44 において各 H_λ に対応する中間 Picard-Vessiot 拡大を L_λ/K とすれば, 系 3.56 によりこれらは finitely generated な拡大であり, L は L_λ たちの filtered union になっている: $L = \bigcup_\lambda L_\lambda$. さらに定理 3.54 により, 各 L_λ/K はある K 上有限次元な $K\#D$-module V_λ の最小分解体になっている．そこで $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ とすれば V は locally finite で, L/K は V の最小分解体である．

($\Leftarrow$) L/K がある locally finite な $K\#D$-module V の最小分解体であったとする．仮定より, V は K 上有限次元な $K\#D$-submodule V_λ たちの filtered union になって

[29]M. Takeuchi, "A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras" の Cor. 3.11

いる: $V = \bigcup_\lambda V_\lambda$. 補題 3.52 (1)(2) より, 各 V_λ は L/K で分解し, $L_\lambda := K\langle V_\lambda\rangle$ とすれば L_λ/K は V_λ の最小分解体である. さらに補題 3.52 (3) により, $\bigcup_\lambda L_\lambda$ は L の D-module subfield たちの filtered union になっており, また, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ に対し $f(V) = \bigcup_\lambda f(V_\lambda) \subset \bigcup_\lambda L_\lambda$ だから, $L = K\langle V\rangle = \bigcup_\lambda L_\lambda$. そこで A_λ, H_λ をそれぞれ L_λ/K の principal algebra, Picard-Vessiot Hopf algebra とすれば, $(L/K, \bigcup_\lambda A_\lambda, \bigcup_\lambda H_\lambda)$ が Picard-Vessiot 拡大の定義を満たす. □

3.12 Birkhoff-Witt coalgebra

(次の小節で D について pointed の他にさらに条件を加える必要があるので, この小節ではその条件として用いる言葉を説明します.)

ベクトル空間 V が与えられたときに, 次のような普遍性をもつ coalgebra $B(V)$ を定義する[30].

定理 3.58 ベクトル空間 V が与えられているとする. このとき, 任意の cocommutative pointed irreducible coalgebra C に対して写像

$$\mathrm{Coalg}_R(C, B(V)) \to \mathrm{Hom}_R(C^+, V), \quad F \mapsto \pi \circ F|_{C^+} \quad (= \pi|_{B(V)^+} \circ F|_{C^+})$$

が全単射となるような, ある cocommutative pointed irreducible coalgebra $B(V)$ と線形写像 $\pi : B(V) \to V$ が (同型を除き) 一意的に存在する. ここで, $C^+ = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$, $\mathrm{Coalg}_R(C, B(V))$ は C から $B(V)$ への coalgebra map 全体を表す.

[証明 (一意性)] 一意性は普遍性による. $(B(V), \pi)$ と $(B'(V), \pi')$ が定理の条件を満たすとしよう. すると, ある $\varphi \in \mathrm{Coalg}_R(B(V), B'(V))$ と $\psi \in \mathrm{Coalg}_R(B'(V), B(V))$ が存在して $\pi|_{B(V)^+} = \pi' \circ \varphi|_{B(V)^+}$, $\pi'|_{B'(V)^+} = \pi \circ \psi|_{B'(V)^+}$ を満たす. このとき

$$\pi' \circ (\varphi \circ \psi)|_{B'(V)^+} = \pi' \circ \varphi|_{B(V)^+} \circ \psi|_{B'(V)^+} = \pi \circ \psi|_{B'(V)^+} = \pi'|_{B'(V)^+}$$

より $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ を得る. 同様に $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ となるので, φ, ψ が同型 $B(V) \simeq B'(V)$ を与えることが分かる. □(一意性)

存在性は, 本稿では V に対して $B(V)$ を直接構成することにより示すことにする. まず, V が 1 次元の場合には例 1.5 で定義した coalgebra が条件を満たす:

[30] 通常は $B(V)$ の前に V 上の cocommutative cofree coalgebra $C(V)$ というものを定義して, $B(V)$ は 1 を含む $C(V)$ の irreducible component として定義されます (例えば Abe, "Hopf Algebras" の §2.5.1 を参照) が, ここでは簡単のため, 一意性を示した後 $B(V)$ を直接構成することで存在性の証明とします.

例 3.59 $V=R$ のときを考える. $B(R)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}Rd_i$ を例 1.5 の coalgebra とし, 線形写像 $\pi : B(R)\to R$ を

$$\pi(d_i)=\begin{cases}1 & (i=1)\\ 0 & (i=0,2,3,\dots)\end{cases}$$

により定め, $(B(R),\pi)$ が定理の条件を満たすことを示そう.

C を任意の cocommutative pointed irreducible coalgebra とする. このとき, C は唯一つの grouplike 元を持つはずなのでそれを 1_C と書く. 任意の $f\in \mathrm{Hom}_R(C^+,R)$ に対し, $\widetilde{f}\in \mathrm{Hom}_R(C,R)$ を $\widetilde{f}(c)=f(c-\varepsilon(c)1_C)$ $(c\in C)$ により定め, $F:C\to B(R)$ を

$$F(c)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{f}^n(c)d_n \quad (c\in C) \tag{3.6}$$

により定める. ここで, $\widetilde{f}^n$ は $*$-積による $\widetilde{f}$ の n 乗を表す (とくに $\widetilde{f}^0=\varepsilon$). C の coradical filtration (「聴講ノート 2002」の６月１７日を参照) に注意すれば, 各 $c\in C$ について上式の右辺は有限和になるので F は well-defined である. さらに,

$$\begin{aligned}(F\otimes F)(\Delta(c)) &= \sum_{i,j=0}^{\infty}\sum \widetilde{f}^i(c_1)\widetilde{f}^j(c_2)d_i\otimes d_j=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum \widetilde{f}^i(c_1)\widetilde{f}^{n-i}(c_2)d_i\otimes d_{n-i}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{f}^n(c)\Delta(d_n)=\Delta(F(c)),\\ \varepsilon(F(c)) &= \widetilde{f}^0(c)=\varepsilon(c)\end{aligned}$$

より, $F\in \mathrm{Coalg}_R(C,B(R))$ を得る. そして $\pi\circ F|_{C^+}=f$ となるので, $F\mapsto \pi\circ F|_{C^+}$ の全射性が示された.

次に, 単射性を示すため, 任意の $F\in \mathrm{Coalg}_R(C,B(R))$ に対して $f=\pi\circ F|_{C^+}$ とおくときに F が f から (3.6) によって定まる写像と一致することを示す. 任意の $c\in C$ をとり, $F(c)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i d_i$ $(\lambda_i\in R)$ とおく. すると, まず $\lambda_0=\varepsilon(F(c))=\varepsilon(c)=\widetilde{f}^0(c)$ を得る. さらに, $\lambda_1=\pi(F(c))=\pi(F(c-\varepsilon(c)1_C))+\varepsilon(c)\pi(F(1_C))=\widetilde{f}(c)+\varepsilon(c)\pi(d_0)=\widetilde{f}(c)$. $n=2,3,4,\dots$ に対し,

$$\lambda_n=\sum \pi(F(c)_1)\cdots\pi(F(c)_n)=\sum \pi(F(c_1))\cdots\pi(F(c_n))=\sum \widetilde{f}(c_1)\cdots\widetilde{f}(c_n)=\widetilde{f}^n(c).$$

以上により単射性も示された.

[定理 3.58 の証明 (存在性)] V の基底を一組とって X とおき,

$$N^X:=\{f:X\to \mathbb{Z}_{\geq 0}\mid \text{有限個の元を除く } x\in X \text{ について } f(x)=0\}$$

とする. 各 $x\in X$ を写像 $X\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $y\mapsto \delta_{y,x}$ と同一視することにより $X\subset N^X$ とみなす. また, $f,g\in N^X$ に対し和 $f+g\in N^X$ を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ により定め

る．$B(V)$ を, N^X を添字集合とする基底 $\{u_f\}_{f\in N^X}$ をもつベクトル空間とし, 線形写像 $\Delta : B(V) \to B(V) \otimes_R B(V)$, $\varepsilon : B(V) \to R$ を

$$\begin{aligned} \delta(u_f) &= \sum_{g+h=f} u_g \otimes u_h, \\ \varepsilon(u_f) &= \delta_{f,0} \quad (\text{ここで, } 0 \text{ は恒等的に } 0 \text{ となる } N^X \text{ の元を表す}) \end{aligned}$$

により定める．すると $(B(V), \Delta, \varepsilon)$ は cocommutative pointed irreducible coalgebra となる．そして $\pi : B(V) \to V$ を

$$\pi(u_f) = \begin{cases} x & (f = x \in X \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定めると, 例 3.59 と同様にして $(B(V), \pi)$ が定理の条件を満たすことを示すことができる．C を任意の cocommutative pointed irreducible coalgebra とするとき, $f \in \mathrm{Hom}_R(C^+, V)$ に対応する $F \in \mathrm{Coalg}_R(C, B(V))$ は次で与えられる写像である: 各 $x \in X$ に対し $f_x \in \mathrm{Hom}_R(C, R)$ を $f(c - \varepsilon(c)1_C) = \sum_{x\in X} f_x(c)x$ $(c \in C)$ を満たすようにとるとき,

$$F(c) = \sum_{g\in N^X} \left\{ \left(\prod_{x\in X} f_x^{g(x)} \right)(c) \right\} u_g \quad (c \in C).$$

$\square$

定義 3.60 coalgebra C が **Birkhoff-Witt coalgebra** であるとは, あるベクトル空間 V が存在して coalgebra として $C \simeq B(V)$ となることをいう．

これは cocommutative Hopf algebra の構造を述べる際に重要となる概念である．たとえば, 代数的アフィン群スキームについて, その超代数が Birkhoff-Witt であることが smooth であるための必要十分条件となる (R.G. Heyneman, M.E. Sweedler, “Affine Hopf algebras I, II”, 1969, 1970).

演習 3.61 (1) V を n 次元ベクトル空間 $(n < \infty)$ とする．A を commutative algebra とすると, $\mathrm{Hom}_R(B(V), A)$ は $*$-積により commutative algebra となる (演習 1.11). この $\mathrm{Hom}_R(B(V), A)$ は A 係数の n 変数形式的ベキ級数環 $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ と同型であることを示せ.

(2) 一般に, V を任意のベクトル空間, A を任意の commutative algebra とするとき, $\mathrm{Hom}_R(B(V), A)$ は A 係数の形式的ベキ級数環たちの逆極限と同型になることを示せ.

[ヒント] (1) 注意 1.13 の上にある「２学期のレポート課題」と同様.

(2) V がある有限次元部分空間の族 $\{V_i\}_i$ の直極限であることから, $B(V)$ が $\{B(V_i)\}_i$ の直極限と同型であることがいえる.

3.13　最小分解体の存在性と一意性

この小節では D は Birkhoff-Witt bialgebra であると仮定する (つまり, D は Hopf algebra で[31], あるベクトル空間 U が存在して coalgebra として $D \simeq B(U)$). この仮定のもとで, 定数体が代数閉体となるような D-module field K 上では, すべての rank 有限な $K\#D$-module V に対して, その最小分解体 L/K で $L^D = K^D$ となるものが一意的に存在することを証明したい (定理 3.64). まず, 準備としていくつか補題を示す.

補題 3.62 A を D-module algebra とし, その構造に付随する単射 D-module algebra map $\rho_A : A \to \mathrm{Hom}_R(D, A)$, $a \mapsto [d \mapsto da]$ (注意 3.2) をとる.

(1) A の任意の ideal J について, $\rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, J))$ は J に含まれる最大の D-stable ideal である. 従って, J が D-stable $\Leftrightarrow$ $J = \rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, J))$.

(2) もし I が A の D-stable ideal ならば, その根基 $\sqrt{I}$ も D-stable ideal である.

(3) もし P が A の素 ideal ならば, $\rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, P))$ は D-stable な A の素 ideal となる.

(4) もし A が simple D-module algebra ならば, A は整域である.

[証明] (1) は容易.

(2) 演習 3.61 により $\mathrm{Hom}_R(D, A/\sqrt{I}) \simeq \mathrm{Hom}_R(D, A)/\mathrm{Hom}_R(D, \sqrt{I})$ は被約であるから, $\mathrm{Hom}_R(D, \sqrt{I})$ は $\mathrm{Hom}_R(D, A)$ の根基 ideal である. 従ってその逆像 $\rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, \sqrt{I}))$ は A の根基 ideal で, しかも I を含み $\sqrt{I}$ に含まれる. 故に $\rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, \sqrt{I})) = \sqrt{I}$.

(3) 演習 3.61 により $\mathrm{Hom}_R(D, A/P) \simeq \mathrm{Hom}_R(D, A)/\mathrm{Hom}_R(D, P)$ は整域であるから, $\mathrm{Hom}_R(D, P)$ は $\mathrm{Hom}_R(D, A)$ の素 ideal である. 従ってその逆像 $\rho_A^{-1}(\mathrm{Hom}_R(D, P)$ は A の素 ideal となる.

(4) は (3) から直ちに従う. □

補題 3.63 $K \subset A$ を D-module algebra の包含, K は体, A は simple と仮定する. すると補題 3.62 により A は整域である. A の商体を L とし, L に補題 3.42 により D-module field の構造を入れる. このとき次が成立する.

(1) $A^D = L^D$.

(2) もし A が K-algebra として有限生成ならば, 体拡大 L^D/K^D は代数拡大である.

[証明] (1) 任意の $x \in L^D$ について, $A : x = \{a \in A \mid ax \in A\}$ は A の D-stable ideal で, しかも非零元を含む. 仮定より A は simple なので, $A : x = A$, よって $x \in A^D$.

(2) A の極大 ideal M をひとつとる. canonical な単射 $A^D \to A/M$ により A^D は A/M の部分体とみなせるので, Hilbert の零点定理により A^D $(= L^D)$ のすべ

[31] irreducible な bialgebra は常に Hopf algebra となる (Sweedler, "Hopf Algebras" の Theorem 9.2.2 を参照).

ての元は K 上代数的である. x を L^D の任意の元とし, その K 上最小多項式を $\varphi(X) = X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$ ($c_i \in K$) とおく. このとき任意の $d \in D$ について, $\varepsilon(d)X^n + (dc_1)X^{n-1} + \cdots + dc_n$ も x を根として持つので, $\varphi(X)$ の最小性により $dc_i = \varepsilon(d)c_i$ ($i = 1, \ldots, n$) を得る. 従って $c_i \in K^D$ ($i = 1, \ldots, n$) であるから, x は K^D 上代数的である. □

定理 3.64 K を D-module field, K^D は代数閉体と仮定する. V を rank 有限 (K 上有限次元) な左 $K\#D$-module とするとき, V の最小分解体 L/K で $L^D = K^D$ となるものが K 上 D-module field の同型を除き一意的に存在する.

[証明] (存在性) V の K-基底を 1 組とりそれを $v_1, \ldots, v_n$ とおく. 各 $d \in D$ に対し $c_{ij}(d) \in K$ ($1 \leq i, j \leq n$) を

$$dv_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(d)v_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となるように定める. さらに, n^2 変数の K-係数多項式環 $K[X_{ij}] = K[X_{11}, \ldots, X_{nn}]$ に

$$dX_{ij} = \sum_{s=1}^{n} c_{is}(d)X_{sj} \quad (d \in D)$$

により D-module K-algebra の構造を入れる. 補題 3.42 により, この D-module algebra 構造は $F = K[X_{ij}, 1/\det(X_{ij})]$ に一意的に拡張される. F の極大 D-stable ideal I を一つとり, $A = F/I$ とおく. このとき K は A の D-module subfield とみなせる. A は simple かつ K-algebra として有限生成で, K^D は代数閉体なので, A の商体を L とすれば補題 3.63 により $L^D = K^D$ である. また, A における X_{ij} の像を x_{ij} と書けば $L = K(x_{ij})$ で, さらに $\det(x_{ij}) \neq 0$ であるから (x_{ij}) は n 個の K^D-線形独立な V の解を与える. 従って L/K は V の最小分解体である.

(一意性) 条件を満たす拡大が L_1, L_2 の 2 つ与えられたとする. 定理 3.54 により各 L_i/K は Picard-Vessiot 拡大なので, その principal D-module algebra をとり A_i とおく ($i = 1, 2$). $A = A_1 \otimes_K A_2$ とし, A の極大 D-stable ideal J を一つとる. A/J は simple かつ K-algebra として有限生成なので, A/J の商体を L とすればやはり補題 3.63 により $L^D = K^D$ を得る. 各 A_i は simple なので, canonical な D-module algebra map $A_i \to A/J$ は単射であり, 従って K 上 D-module field の単射 $L_i \hookrightarrow L$ に拡張できる. また次元の比較 (補題 3.48 を参照) により K^D-線形同型 $\mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L_i) \simeq \mathrm{Hom}_{K\#D}(V, L)$ を得る. 従って L_1, L_2 の L における像はどちらも $K\langle V\rangle$ (in L) に一致する. 故に K 上 D-module field の同型 $L_1 \simeq L_2$ を得る. □

3.14 補足１：G-primitive 拡大

この小節では D は cocommutative pointed Hopf algebra とする (irreducible でなくともよい). 3.11 節の 定義 3.53 (3) で $\mathbf{GL}_n$-primitive という概念を定義したが, これはもっと一般の affine group scheme $\mathbf{G}$ に対して拡張できるので, それについて補足したい.

L/K を D-module field の拡大, $k = K^D$, $\mathbf{G}$ を k 上の affine group scheme とする. $\mathbf{G}$ の L 有理点 $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ $(= \mathrm{Alg}_k(k[\mathbf{G}], L))$ に対して R-線形写像 $\delta_\alpha : D \to \mathrm{Hom}_k(k[\mathbf{G}], L)$ を

$$\begin{array}{rcccl} \delta_\alpha : D & \to & \mathrm{Hom}_k(k[\mathbf{G}], L) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_k(k[\mathbf{G}], L) \\ d & \mapsto & [f \mapsto d(\alpha(f))] & & \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi * \alpha^{-1} \end{array}$$

により定める. Σ 記法で書くならば,

$$\delta_\alpha(d)(f) = \sum (d(\alpha(f_1)))\alpha(S(f_2)) \quad (d \in D,\ f \in k[\mathbf{G}])$$

(ここで S は $k[\mathbf{G}]$ の antipode) である. この δ_α は measuring $D \otimes_R k[\mathbf{G}] \to L$ を与える. すなわち, $d \in D$, $f, g \in k[\mathbf{G}]$ に対して

$$\delta_\alpha(d)(fg) = \sum (\delta_\alpha(d_1)(f))(\delta_\alpha(d_2)(g))$$

が成立する.

例 3.65 (logarithmic derivative) 上記は微分体の理論における logarithmic derivative を一般化したものである. K を標数 0 の differential field, k を K の定数体とする. $\mathbf{G}$ を k 上の affine group scheme, L/K を微分体の拡大とするとき, $\mathbf{G}(L)$ の点 $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ における接ベクトル v_α を

$$v_\alpha : k[\mathbf{G}] \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{(-)'} L, \quad f \mapsto (\alpha(f))'$$

により定める. α によって L を $k[\mathbf{G}]$-module と思ったものを ${}_\alpha L$ と書くなら, v_α は $k[\mathbf{G}]$ から ${}_\alpha L$ への k-derivation, すなわち $v_\alpha \in \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\alpha L)$ である. この v_α に対応する Lie 環の元, すなわち v_α の

$$\mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\alpha L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon L)\ (= \mathrm{Lie}\, \mathbf{G}_L), \quad v \mapsto v * \alpha^{-1}$$

による像を $\delta\alpha$ と書き, α の **logarithmic derivative** (対数微分) と呼ぶ[32]. 我々の言葉でいうと, $D = R[\partial]$ を primitive 元 ∂ で生成される bialgebra として L/K を D-module field の拡大とみたときの $\delta_\alpha(\partial)$ が $\delta\alpha$ に他ならない.

[32] $\mathbf{G}$ が $\mathbf{GL}_n$ の closed subgroup scheme の場合, $\delta\alpha$ を行列で書くと, $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbf{G}(L) \subset \mathbf{GL}_n(L)$ に対し $\delta\alpha = (\alpha'_{ij})(\alpha_{ij})^{-1} \in \mathrm{Lie}\, \mathbf{G}_L \subset M_n(L)$ となる. これが対数微分 $(\log f(x))' = f'(x)/f(x)$ の一般化になっているのでこのような名称で呼ばれる.

定義 3.66 L/K を D-module field の拡大, $k = K^D$, $\mathbf{G}$ を k 上の affine group scheme とする．$\alpha \in \mathbf{G}(L)$ に対し，K と $\alpha(k[\mathbf{G}]) = \{\alpha(f) \mid f \in k[\mathbf{G}]\}$ を含む最小の L の D-module subfield を $K\langle\alpha\rangle$ と書く．

(1) $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ が **G-primitive over** K であるとは, 任意の $d \in D$, $f \in k[\mathbf{G}]$ について $\delta_\alpha(d)(f) \in K$ となることをいう．

(2) L/K が **G-primitive 拡大** であるとは, ある $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ が存在して α が $\mathbf{G}$-primitive over K かつ $L = K\langle\alpha\rangle$ となることをいう．

例 3.67 (1) $\mathbf{G} = \mathbf{G}_\mathrm{a}$, $k[\mathbf{G}] = k[\mathbf{G}_\mathrm{a}] = k[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $S(X) = -X$, の場合を考える．$x \in \mathbf{G}_\mathrm{a}(L) = L$ と $d \in D$ に対し，$\delta_x(d) : k[X] \to L$ は $\delta_x(d)(X) = (d - \varepsilon(d))x$ により与えられる．従って,

$$x \text{ が } \mathbf{G}_\mathrm{a}\text{-primitive over } K \Leftrightarrow (d-\varepsilon(d))x \in K\ ({}^\forall d \in D) \Leftrightarrow dx \in K\ ({}^\forall d \in D^+).$$

(2) $\mathbf{G} = \mathbf{G}_\mathrm{m}$, $k[\mathbf{G}] = k[\mathbf{G}_\mathrm{m}] = k[X, X^{-1}]$, $\Delta(X) = X \otimes X$, $S(X) = X^{-1}$, の場合を考える．$x \in \mathbf{G}_\mathrm{m}(L) = L^\times$ と $d \in D$ に対し，$\delta_x(d) : k[X, X^{-1}] \to L$ は $\delta_x(d)(X) = (dx)x^{-1}$, $\delta_x(d)(X^{-1}) = (dx^{-1})x$ により与えられる．従って,

$$x \text{ が } \mathbf{G}_\mathrm{m}\text{-primitive over } K \Leftrightarrow (dx)x^{-1} \in K\ ({}^\forall d \in D).$$

上記の ($\Leftarrow$) はあまり明らかではないが, それについては定理 3.54, (d) $\Rightarrow$ (a) の証明前半を参照.

定理 3.68 L/K を D-module field の拡大とし, $L^D = K^D =: k$ を仮定する．また, $\mathbf{G}$ を k 上の affine group scheme とする．このときもし L/K が $\mathbf{G}$-primitive 拡大 ならば, L/K は Picard-Vessiot 拡大で, さらに Picard-Vessiot group scheme $\mathbf{G}(L/K)$ から $\mathbf{G}$ への閉埋め込み $\mathbf{G}(L/K) \hookrightarrow \mathbf{G}$ が存在する．

[証明] L/K が $\mathbf{G}$-primitive 拡大なので, ある $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ が存在して α は $\mathbf{G}$-primitive over K かつ $L = K\langle\alpha\rangle$ となっている．$A = K[\alpha(k[\mathbf{G}])]$ を $\alpha(k[\mathbf{G}])$ で生成される L の K-subalgebra とする．仮定より任意の $d \in D$ に対し, $\delta_\alpha(d) \in \mathrm{Hom}_k(k[\mathbf{G}], K)$ だから, $d(\alpha(k[\mathbf{G}])) = (\delta_\alpha(d) * \alpha)(k[\mathbf{G}]) \subset A$. よって A は L の D-module K-subalgebra である．さらに, $L = K\langle\alpha\rangle$ と補題 3.43 により, A の L における商体は L と一致する．

後は $H = (A \otimes_K A)^D$ とするときに写像 $\mu : A \otimes_k H \to A \otimes_K A$, $a \otimes_k h \mapsto ah$ が全射であることを示せば $(L/K, A, H)$ が Picard-Vessiot 拡大であることがいえる．ここで, k-algebra map $k[\mathbf{G}] \to A \otimes_K A$, $f \mapsto \widetilde{f}$ を $\widetilde{f} = \sum \alpha(S(f_1)) \otimes_K \alpha(f_2)$ により定める．すると実は $\widetilde{f} \in H$ となる: 実際, $d \in D$ に対し,

$$\begin{aligned} d\widetilde{f} &= \sum d_1(\alpha(S(f_1))) \otimes_K d_2(\alpha(f_2)) = \sum (\delta_\alpha(d_1) * \alpha)(S(f_1)) \otimes_K (\delta_\alpha(d_2) * \alpha)(f_2) \\ &= \sum (\delta_\alpha(d_1)(S(f_2)))\alpha(S(f_1)) \otimes_K (\delta_\alpha(d_2)(f_3))\alpha(f_4) \\ &= \sum \alpha(S(f_1)) \otimes_K (\delta_\alpha(d_1)(S(f_2)))(\delta_\alpha(d_2)(f_3))\alpha(f_4) \\ &= \sum \alpha(S(f_1)) \otimes_K (\delta_\alpha(d)(S(f_2)f_3)\alpha(f_4) = \varepsilon(d)\widetilde{f}. \end{aligned}$$

そして任意の $f \in k[\mathbf{G}]$ に対し, $1 \otimes_K \alpha(f) = \mu(\sum \alpha(f_1) \otimes_k \widetilde{f_2})$ となるので, μ が全射であることがいえる. よって $(L/K, A, H)$ は Picard-Vessiot 拡大である. また今の議論から $H = \{\widetilde{f} \mid f \in k[\mathbf{G}]\}$ であることも分かる.

最後に $k[\mathbf{G}] \to H$, $f \mapsto \widetilde{f}$ が全射 Hopf algebra map であることを示せばよい. $A \otimes_K A$ の A-coring 構造を $\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ と書く. 任意の $f \in k[\mathbf{G}]$ に対し, $\boldsymbol{\varepsilon}(\widetilde{f}) = \varepsilon(f)$, また, $\sum \widetilde{f_1} \otimes_k \widetilde{f_2}$ の $H \otimes_k H \hookrightarrow A \otimes_K A \otimes_K A$ による像を計算してみれば $\boldsymbol{\Delta}(\widetilde{f})$ と一致するので, $f \mapsto \widetilde{f}$ は k-coalgebra map である. □

上の定理の逆も適当な条件のもとで成立する:

定理 3.69 $(L/K, A, H)$ を D-module field の Picard-Vessiot 拡大, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(L/K)$ をその Picard-Vessiot group scheme とする. このときもし $H^1(L/K, \mathbf{G}) = \{e\}$ (trivial) ならば L/K は $\mathbf{G}$-primitive 拡大である.

[証明] 包含写像 $H \hookrightarrow L \otimes_K L$ は $\mathbf{G}(L \otimes_K L)$ の元として 1-cocycle[33] なので, $H^1(L/K, \mathbf{G}) = \{e\}$ により, ある $\alpha \in \mathbf{G}(L)$ が存在して

$$f = \sum \alpha(S(f_1)) \otimes_K \alpha(f_2) \quad ({}^\forall f \in H) \tag{3.7}$$

を満たす. この α が $\mathbf{G}$-primitive over K であることを示そう. まず, 任意の $f \in H$ に対して

$$1 \otimes_K \alpha(f) = \sum (\alpha(f_1) \otimes_K 1)(\alpha(S(f_2)) \otimes_K \alpha(f_3)) = \sum (\alpha(f_1) \otimes_K 1) f_2.$$

この両辺に任意の $d \in D$ を作用させると

$$1 \otimes_K d(\alpha(f)) = \sum (d(\alpha(f_1)) \otimes_K 1) f_2.$$

よって任意の $d \in D$, $f \in H$ に対し,

$$\begin{aligned} 1 \otimes_K \delta_\alpha(d)(f) &= \sum (1 \otimes_K d(\alpha(f_1)))(1 \otimes_K \alpha(S(f_2))) = \sum (d(\alpha(f_1)) \otimes_K 1) f_2 (1 \otimes_K \alpha(S(f_3))) \\ &= \sum (d(\alpha(f_1)) \otimes_K 1)(\alpha(S(f_2)) \otimes_K \alpha(f_3))(1 \otimes_K \alpha(S(f_4))) \\ &= \delta_\alpha(d)(f) \otimes_K 1. \end{aligned}$$

すなわち $\delta_\alpha(d)(f) \in K$ を得る. 従って, 定理 3.68 の証明と同様に $A_\alpha = K[\alpha(H)]$, $H_\alpha = (A_\alpha \otimes_K A_\alpha)^D$ とおけば $(K\langle\alpha\rangle/K, A_\alpha, H_\alpha)$ は Picard-Vessiot 拡大であることがいえる. 一方 (3.7) により $H = H_\alpha$ であるから, 定理 3.44 (3) により $L = K\langle\alpha\rangle$ を得る. □

[33] H の coalgebra 構造が $L \otimes_K L$ の L-coring 構造からきていることによる.

3.15 補足２：D-加群体構造の分離代数拡大への拡張

ここでは D は cocommutative pointed irreducible bialgebra とする (Birkhoff-Witt はとくに仮定しない). K を D-module field, L/K を体の分離代数拡大とするとき, K の D-ferential 構造 (下記の定義を参照) は L に一意的に拡張できることが知られている (竹内 [1] の (1.10)). さらにこのとき L/K が Galois 拡大であれば, それは Picard-Vessiot 拡大でもあり, Picard-Vessiot 群は Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ に (constant group scheme として) 一致する. 補足としてそのことを示したい.

定義 3.70 C をある grouplike 元 1_C をもつ cocommutative coalgebra, A を algebra とする. A が C**-ferential algebra** であるとは, ある algebra map $\rho : A \to \mathrm{Hom}_R(C, A)$ で $\rho(a)(1_C) = a$ ($^\forall a \in A$) を満たすものが与えられていることをいう. 以下, $a \in A$, $c \in C$ に対し $\rho(a)(c)$ を単に ca と書くことがある.

命題 3.71 C を cocommutative pointed irreducible coalgebra とし, その (唯一の) grouplike 元を 1_C と書く. K を C-ferential field, L/K を体の分離代数拡大とするとき, K の C-ferential 構造 $\rho : K \to \mathrm{Hom}_R(C, K)$ は L の C-ferential 構造 $\widetilde{\rho} : L \to \mathrm{Hom}_R(C, L)$ に一意的に拡張できる.

[証明] L/K は有限次分離拡大と仮定してよい. また, 定理 2.30 と同様にして, C は 1_C を含む有限次元 subcoalgebra たちの filtered union として $C = \bigcup C_i$ と書けるので, $\mathrm{Hom}_R(C, K) = \varprojlim \mathrm{Hom}_R(C_i, K)$, $\mathrm{Hom}_R(C, L) = \varprojlim \mathrm{Hom}_R(C_i, L)$ となり, 従って各 i についての K の C_i-ferential 構造 $K \to \mathrm{Hom}_R(C_i, K)$ が L の C_i-ferential 構造 $L \to \mathrm{Hom}_R(C_i, L)$ に一意的に拡張できればよい. だから最初から C は有限次元と仮定して良い. $\mathrm{Hom}_R(C, L)$ は $\rho(K)$ 上有限次元な commutative algebra となるので, $\mathrm{Hom}_R(C, L)$ の nilradical を N, 最大分離 $\rho(K)$-subalgebra を S とすると $\mathrm{Hom}_R(C, L) = S \oplus N$ と書ける. 次の全射 algebra map

$$\pi : \mathrm{Hom}_R(C, L) \to L, \quad f \mapsto f(1_C)$$

を考えると, C は pointed irreducible (よって $C = \bigcup_{i \geq 0} \wedge^i k1_C$) なので $\mathrm{Ker}\, \pi \subset N$ であり, さらに $\mathrm{Hom}_R(C, L)/\mathrm{Ker}\, \pi \simeq L$ が被約なので, 結局 $\mathrm{Ker}\, \pi = N$ となる. 従って π はある体同型 $S \xrightarrow{\sim} L$ を induce する. その逆写像を使って

$$\widetilde{\rho} : L \xrightarrow{\sim} S \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, L)$$

により $\widetilde{\rho}$ を定めれば, これが ρ の拡張になっている. 次に一意性を示す. ρ' を別の拡張とするとき, $\rho'(L)$ は分離 $\rho(K)$-algebra でなければならないから $\rho'(L) \subset S$ となる. さらに $\pi \circ \rho' = \mathrm{id}_L = \pi \circ \widetilde{\rho}$ だから $\rho' = \widetilde{\rho}$ を得る. □

系 3.72 D を cocommutative pointed irreducible bialgebra, K を D-module field, L/K を体の分離代数拡大とする．このとき K の D-module field 構造は L の D-module field 構造に一意的に拡張できる．

[証明] 命題 3.71 により K の D-ferential 構造は L の D-ferential 構造に一意的に拡張できる．それによって得られた measuring $D \otimes_R L \to L$, $d \otimes a \mapsto da$ が L に D-module 構造を与えることを示せばよい．$\varphi, \psi : L \to \mathrm{Hom}_R(D \otimes_R D, L)$ を $\varphi(a)(d \otimes c) = d(ca)$, $\psi(a)(d \otimes c) = (dc)a$ ($a \in L$, $d, c \in D$) により定めると，これらはそれぞれ L に $D \otimes_R D$-ferential 構造を与える．D が pointed irreducible なので $D \otimes_R D$ も pointed irreducible であり, $\varphi|_K = \psi|_K$ は K の $D \otimes_R D$-ferential 構造を与えるので, 命題 3.71 により $\varphi = \psi$ を得る． □

命題 3.73 上記の系においてさらに $L^D = K^D =: k$ (これは K^D が代数閉体の場合は補題 3.63 により常に成立する) かつ L/K が Galois 拡大であったと仮定する．L/K の有限次中間 Galois 拡大全体の族を $\{L_i/K\}$, $\Gamma_i = \mathrm{Gal}(L_i/K)$ とおけば, $L = \bigcup L_i = \varinjlim L_i$, $\mathrm{Gal}(L/K) = \varprojlim \Gamma_i$ と書ける．このとき $(L/K, L, \varinjlim (k\Gamma_i)^*)$ は D-module field の Picard-Vessiot 拡大である．ここで, $(k\Gamma_i)^*$ は群環 $k\Gamma_i$ の双対 Hopf algebra を表す．

[証明] 各 L_i/K について示せばよいので, 最初から L/K は有限次 Galois 拡大と仮定してよい．$\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおき, 各 $g \in \Gamma$ の $(k\Gamma)^*$ における双対元を e_g と書く ($e_g(h) = \delta_{g,h}$ $(g, h \in \Gamma)$)．仮定より L/K は右 $(k\Gamma)^*$-Galois 拡大で,

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L \otimes_k (k\Gamma)^*, \quad a \otimes b \mapsto a \sum_{g \in \Gamma} gb \otimes e_g$$

は algebra isomorphism である．そこで, $(k\Gamma)^*$ に trivial な D-module algebra 構造を入れたときに上記の写像が D-linear になることを示せば証明が終わる．それには L の元に対する D の作用と Γ の作用が可換であることを示せばよい．

$D \supset C$ を任意の有限次元 subcoalgebra とし, L の C-ferential 構造を $\rho : L \to \mathrm{Hom}_R(C, L)$ とおく．任意の $a \in L$, $g \in \Gamma$ に対し $\rho(ga) = g \circ \rho(a)$ となることを示そう．命題 3.71 の証明と同様に $\mathrm{Hom}_R(C, L)$ の最大分離 $\rho(K)$-subalgebra S をとる．写像 $g \circ - : \mathrm{Hom}_R(C, L) \to \mathrm{Hom}_R(C, L)$, $f \mapsto g \circ f$ は $\rho(K)$-algebra isomorsphim だから, $g \circ S = S$ となる．よって次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "g"'] & S \arrow[l, "\sim"', "\pi"] \arrow[r, "\text{inclusion}"] \arrow[d, "g\circ-"] & \mathrm{Hom}_R(C, L) \arrow[d, "g\circ-"] \\ L & S \arrow[l, "\sim"', "\pi"] \arrow[r, "\text{inclusion}"'] & \mathrm{Hom}_R(C, L). \end{tikzcd}$$

これは求める主張を意味している． □