代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 4 月 15 日

講義の主題・キーワード

(1) ホップ代数
(2) pointed ホップ代数
(3) 量子包絡環
(4) 組紐カテゴリーと Yetter-Drinfeld 加群
(5) Nichols 代数
(6) boson 化と cocycle-twist
(7) カルタン型 Nichols 代数

[記者注] このノートに収録してあるのは (1) と (2) の部分 (一学期分) だけです.

1 ホップ代数 (その 1)

1.1 algebra と coalgebra

体 k を一つ固定し, 基礎体とする. ちなみになぜよく "k" が使われるのかというと, ドイツ語で体のことを körper というからである. さらにいうと, フランス語では corps というそうだ. (←豆知識.)

ホップ代数というのは環論のアンチテーゼのようなものである. 環論の中で中心的なのは, 多元環 (k-algebra) や加群の概念で, まずこれらの概念を知らないとホップ代数のことはわからない. というわけで, k-algebra の説明からはじめることにする.

A を単位元 1 をもつ環で, また同時に k 上のベクトル空間であるものとする. 環としての足し算とベクトル空間としての足し算は共通しているものとする. このとき,

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

乗法:

$$\begin{array}{rcl} m : A \times A & \to & A \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

が双線形写像であるならば A は k-algebra であるという.

例 1.1

- $M_n(k)$　k 上の n 次の行列環
- $k[X_1, \cdots, X_n]$　n 変数の多項式環
- kG　群 G の群環

1.1.1　algebra の定義の見直しと coalgebra の定義

さて, 今の k-algebra の定義をすべてベクトル空間の枠内で扱いたい. 特に, 「双線形」写像は (categorical な意味で) ベクトル空間同士の射としては考えにくいので, これをやめて「線形」写像だけを考えたい.

(…というときに便利なのがベクトル空間の「テンソル積」である. あまり詳しく説明する時間がないが, $U \times V$ を加工して得られるベクトル空間 $U \otimes V$ があって, canonical な双線形写像

$$\begin{array}{rcl} U \times V & \to & U \otimes V \\ (u, v) & \mapsto & u \otimes v \end{array}$$

がある. $U \otimes V$ は次の普遍的な性質を満たす:

$$\begin{array}{rl} & \varphi : U \times V \to W \text{ が双線形} \\ \Rightarrow & {}^{\exists 1}\bar{\varphi} : U \otimes V \to W \text{ 線形写像 s.t. } \bar{\varphi}(u \otimes v) = \varphi(u, v). \end{array}$$

実はこの, 双線形写像 φ と線形写像 $\bar{\varphi}$ との対応は 1 対 1 である. このようにして, 双線形写像は, ベクトル空間の枠内だけで扱うことが可能である. 三重線形に関しても同様に, $U \otimes V \otimes W$ というテンソル積があって,

$$\begin{array}{rl} & \omega : U \otimes V \otimes W \to X \text{ が三重線形} \\ \Rightarrow & {}^{\exists 1}\bar{\omega} : U \otimes V \otimes W \to X \text{ 線形写像 s.t. } \bar{\omega}(u \otimes v \otimes w) = \omega(u, v, w) \end{array}$$

となる. また,

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes V) \otimes W & \cong & U \otimes V \otimes W & \cong & U \otimes (V \otimes W) \\ (u \otimes v) \otimes w & \leftrightarrow & u \otimes v \otimes w & \leftrightarrow & u \otimes (v \otimes w) \end{array}$$

なども成立する.)

A を k-algebra とするとき, 積 $m : A \times A \to A$ を, これに対応する線形写像 $\bar{m} : A \otimes A \to A$ で置き換えて考える. また, 単位元 1 に関して, $u : k \to A$ を $u(\alpha) = \alpha \cdot 1$ により定める. このとき, k-algebra の概念は, ベクトル空間の枠内で, $(A, \bar{m}, u)$ で言い直すことができる. つまり, ある k 上ベクトル空間 A と $\bar{m} : A \otimes A \to A$ および $u : k \to A$ があって,

(1) 結合律 ($(ab)c = a(bc)$). すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\bar{m}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\bar{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\bar{m}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\bar{m}"] & A
\end{tikzcd}$$

(2) 単位律 ($1a = a = a1$). すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"] & A \otimes A \arrow[d, "\bar{m}"] & A \otimes k \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"'] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \otimes a \mapsto \alpha a \qquad a \otimes \alpha \mapsto \alpha a$$

を満たせば, $(A, \bar{m}, u)$ は k-algebra である, というわけである.

ここで, 今の話を, 矢印の向きを逆にして考えてみることにより, 新しい概念を定義することができる. すなわち, ベクトル空間 C と線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to k$ の組 (C, Δ, ε) があって,

(1)^{op} 余結合律 (coassociative low). すなわち次が可換であること:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(2)^{op} 次も可換であること:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\sim"] & \\
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & C \otimes k
\end{tikzcd}$$

$$c \mapsto 1 \otimes c \qquad c \mapsto c \otimes 1$$

を満たすとき, (C, Δ, ε) を k-coalgebra と呼ぶ. 一般に, 「矢印の向きを反対にした」概念には “co” をつけることが多い.

例 1.2 S を集合とし, kS と書いて S の元を基底とするベクトル空間を表しているものとする.

$$\begin{aligned} \Delta : kS &\to kS \otimes kS \\ \varepsilon : kS &\to k \end{aligned}$$

を, $s \in S$ に対して,

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s \otimes s \\ \varepsilon(s) &= 1 \end{aligned}$$

とすることにより定める. するとこれは k-coalgebra になる.

例 1.3 B_∞ を, 基底 $\{d_0, d_1, \cdots, d_n, \cdots\}$ をもつベクトル空間とする.

$$\Delta(d_n) = d_0 \otimes d_n + d_1 \otimes d_{n-1} + \cdots + d_n \otimes d_0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon(d_n) = \delta_{0n} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \tag{1.2}$$

とすると, $(B_\infty, \Delta, \varepsilon)$ は k-coalgebra である. $(1)^{\mathrm{op}}$, $(2)^{\mathrm{op}}$ において d_n の行き先をそれぞれ確かめてみると,

$$\begin{aligned} & d_0 \otimes \Delta(d_n) + d_1 \otimes \Delta(d_{n-1}) \cdots + d_n \otimes \Delta(d_0) \\ = \ & d_0 \otimes (d_0 \otimes d_n + \cdots + d_n \otimes d_0) + \cdots + d_n \otimes d_0 \otimes d_0 \\ = \ & \textstyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} d_i \otimes d_j \otimes d_{n-i-j} \\ = \ & \textstyle\sum_{i+j+k=n} d_i \otimes d_j \otimes d_k \\ = \ & \Delta(d_0) \otimes d_n + \cdots + \Delta(d_n) \otimes d_0. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \varepsilon(d_0) \otimes d_n + \cdots + \varepsilon(d_n) \otimes d_0 &= 1 \otimes d_n \\ d_0 \otimes \varepsilon(d_n) + \cdots + d_n \otimes \varepsilon(d_0) &= d_n \otimes 1 \end{aligned}$$

となって, 可換図式が成立することがわかる.

[記者注] (C, Δ, ε) を coalgebra とする. ある C の元の列 $\{d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots\} \subset C$ が上記の (1.1), (1.2) を満たしているとき, $\{d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots\}$ を sequence of divided powers という. (特に, sequence が (可算) 無限個の元からなるとき, infinite sequence of divided powers という.) また, ある $d \in C$ に対し, $d_1 = d$ となるような sequence of divided powers $\{d_0, d_1 = d, \ldots, d_n, \ldots\} \subset C$ があるとき, その sequence は d の上に横たわっている (または, d がその sequence の中に横たわっている) という. (注終了)

例 1.4 U_2 を, $\{g, x, h\}$ を基底にもつ空間とし,

$$\Delta g = g \otimes g, \quad \Delta x = g \otimes x + x \otimes h, \quad \Delta h = h \otimes h$$

により Δ を定める[1]. また,

$$\varepsilon g = 1, \quad \varepsilon x = 0, \quad \varepsilon h = 1$$

により ε を定める. このとき, $(U_2, \Delta, \varepsilon)$ は k-coalgebra である.

k-coalgebra (C, Δ, ε) が余可換 (cocommutative) — この cocommutative という言葉をはじめて見た人は, 誤植だと思ってしまうかもしれない (笑) — であるとは, 次の図式が可換であることをいう:

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{tw}"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] & C \otimes C \end{tikzcd} .$$

ただし, $\mathrm{tw} : C \otimes C \to C \otimes C$ は, $\mathrm{tw} : c \otimes d \mapsto d \otimes c$ という写像である.

先程の例でいうと, kS, B_∞ は余可換である. しかし, U_2 は余可換ではない.

1.1.2 algebra と coalgebra の関係

k 上ベクトル空間 V の双対空間

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, k) = \{ f \mid f : V \to k \ \text{線形} \}$$

を考える. V と V^* とには自然なペアリング

$$\begin{array}{ccc} V^* \times V & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & k \\ (f, v) & \mapsto & \langle f, v \rangle = f(v) \end{array}$$

がある. これは双線形なので, 線形写像

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes V & \xrightarrow{e_V} & k \\ f \otimes v & \mapsto & f(v) \end{array}$$

に置き換えることができる. これには普段あまり名前をつけることはないが, 今回は便宜上 e_V という名前をつけておく (e は evaluation の意).

[1]以後しばしば $\Delta(g)$ 等を, カッコを除いて Δg などと書くことがある. ε についても同様.

ここで, 二つのベクトル空間 V, W について, つぎのような写像を考える:

$$\begin{array}{ccccc} V^* \otimes W^* \otimes V \otimes W & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{tw}\otimes\mathrm{id}} & V^* \otimes V \otimes W^* \otimes W & \xrightarrow{e_V \otimes e_W} & k \otimes k \simeq k \\ f \otimes g \otimes v \otimes w & \mapsto & f \otimes v \otimes g \otimes w & \mapsto & \langle f, v\rangle\langle g, w\rangle. \end{array}$$

ここで,

$$\langle f \otimes g, v \otimes w\rangle := \langle f, v\rangle\langle g, w\rangle$$

と書けば, これは双線形写像である. これは $V^* \otimes W^*$ の元を $(V \otimes W)^*$ の元としてみている, ということに他ならない. 実際, 線形写像 $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ で,

$$\begin{array}{rcl} \rho(f \otimes g) : V \otimes W & \to & k \\ v \otimes w & \mapsto & \langle f, v\rangle\langle g, w\rangle \end{array}$$

となるものがあって,

$$\begin{aligned} \langle \rho(f \otimes g), v \otimes w\rangle &= \langle f \otimes g, v \otimes w\rangle \\ &= \langle f, v\rangle\langle g, w\rangle \end{aligned}$$

となる. 証明はしないが, 次のことが成り立つ:

- ρ は常に単射である.
- V, W のうち, 少くとも一方が有限次元なら ρ は全単射になる.

さて, 実は (C, Δ, ε) が coalgebra のとき, C^* は次のようにして algebra とみることができる. まず, (先程 $\bar{m}$ と書いていた) multiplication m は次のように定める:

$$m : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*.$$

これはすなわち, $f, g \in C^*$ に対し, 積 $fg \in C^*$ を

$$\begin{aligned} \langle fg, c\rangle &= \langle \Delta^* \circ \rho(f \otimes g), c\rangle \\ &= \langle \rho(f \otimes g), \Delta c\rangle \\ &= \langle f \otimes g, \Delta c\rangle \end{aligned}$$

として定めるということである. また, $\varepsilon \in C^*$ であるから, C^* は m を乗法とし, ε を単位元として k-algebra になる.

例 1.5 algebra として, $B_\infty^* \cong k[[X]]$ である.

各 $f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n + \cdots \in k[[X]]$ は B_∞^* の元としては,

$$\begin{array}{rcl} f(X) : B_\infty & \to & k \\ d_n & \mapsto & \alpha_n \end{array}$$

により定まるものとしてみる. すなわち, $\langle f(X), d_n\rangle = \alpha_n$ ということである.

$$f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n + \cdots$$
$$g(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \cdots + \beta_n X^n + \cdots$$

に対し,

$$f(X)g(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_{n-i})X^n$$

だから,

$$\langle f(X)g(X), d_n\rangle = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_{n-i}$$

であるが, 一方,

$$\begin{aligned}\langle f(X)\otimes g(X), \Delta d_n\rangle &= \sum_{i=0}^{n}\langle f(X)\otimes g(X), d_i\otimes d_{n-i}\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n}\langle f(X), d_i\rangle\langle g(X), d_{n-i}\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_{n-i}\end{aligned}$$

となるから, $k[[X]]$ としての積と B_∞^* としての積が一致していることがわかる. 単位元についても, $\langle\varepsilon, d_n\rangle = \delta_{0n}$ により,

$$\varepsilon = 1 + 0X + 0X^2 + \cdots = 1$$

となることがわかる. 右辺の 1 は $k[[X]]$ の中の普通の意味での 1 である.

今, C が coalgebra ならば C^* が algebra になることをみた. しかし, A が algebra であっても A^* が coalgebra であるとは限らない. その意味では coalgebra の方が世界が狭い, といえるかもしれない.

しかし, A が有限次元 algebra であれば, A^* は coalgebra の構造をもつことはいえる. Δ, ε は次のようにして定める:

$$\Delta : A^* \xrightarrow{m^*} (A\otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^*\otimes A^*$$
$$\varepsilon : A^* \to k, \quad \varepsilon(f) = \langle f, 1\rangle.$$

($\rho : A^*\otimes A^* \to (A\otimes A)^*$ は, A が有限次元であれば同型であることに注意.) $f\in A^*$, $a, b\in A$ に対し, $\Delta f\in A^*\otimes A^*$ と $a\otimes b\in A\otimes A$ とのペアリングは,

$$\langle\Delta f, a\otimes b\rangle = \langle f, ab\rangle$$

となる.

例 1.6 $M_n(k)^*$ の coalgebra 構造を調べてみる.

$M_n(k)$ の基底として, E_{ij} : 行列単位 (i 行 j 列のみ 1 で, 他は 0 の行列) をとる. 基底同士の積は,

$$E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$$

で, 単位元は,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$$

と書ける. $\{E_{ij}\}$ の双対基として $\{z_{ij}\}$ をとる. すなわち

$$\langle z_{ij}, E_{pq}\rangle = \delta_{ip}\delta_{jq}.$$

$\Delta z_{ij} \in M_n(k)^* \otimes M_n(k)^*$ が何になるのかを調べるには, $M_n(k) \otimes M_n(k)$ の基底 $\{E_{kl} \otimes E_{pq}\}$ とのペアリングがどうなるかをみればよい:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta z_{ij}, E_{kl} \otimes E_{pq}\rangle &= \langle z_{ij}, E_{kl}E_{pq}\rangle \\
&= \langle z_{ij}, \delta_{lp}E_{kq}\rangle \\
&= \delta_{lp}\delta_{ik}\delta_{jq} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \delta_{sl}\delta_{sp}\delta_{ik}\delta_{jq} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \langle z_{is} \otimes z_{sj}, E_{kl} \otimes E_{pq}\rangle \\
&= \langle \sum_{s=1}^{n} z_{is} \otimes z_{sj}, E_{kl} \otimes E_{pq}\rangle
\end{aligned}$$

だから,

$$\Delta z_{ij} = \sum_{s=1}^{n} z_{is} \otimes z_{sj}$$

となる. また, ε はどのようなものかというと,

$$\begin{aligned}
\varepsilon z_{ij} &= \langle z_{ij}, 1\rangle \\
&= \sum_{s=1}^{n} \langle z_{ij}, E_{ss}\rangle \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

このようなものである.

このようにして 基底 $\{z_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ をとり $M_n(k)^*$ を k-coalgebra としてみたものを $M_n^{\mathrm{c}}(k)$ と書き, 行列余代数という.

演習 1.7

$$U_2 \overset{\text{双対}}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(2 次の上三角行列全体のなす代数)}$$

$$g, x, h \overset{\text{双対基}}{\leftrightarrow} E_{11}, E_{12}, E_{22}$$

となることを確かめよ.