代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 6 月 3 日

1 単純 coalgebra と既約 coalgebra (その 1)

1.1 準備

C を coalgebra とする. 以下, この節では C といったら常にある coalgebra をさすものとする. (後で使うので) 少し復習すると, $C \supset D$ が subcoalgebra であるとは,

$$\Delta D \subset D \otimes D$$

となることであったが, これは, D が左 coideal かつ 右 coideal となること, すなわち,

$$\Delta D \subset C \otimes D,\ D \otimes C$$

となることと同値であった[1]. また, D_α $(\alpha \in \Lambda)$ を C の subcoalgebra の族とすると, $\sum_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha, \bigcap_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha$ たちも subcoalgebra となることも注意しておく.

命題 1.1 任意の $c \in C$ に対し, c を含むある有限次元 subcoalgebra $D \subset C$ が必ず存在する.

[証明] まず, C 自身を右 C-comodule と考えると, C を左 C^*-module として考えることができる[2]ので, そのときの作用を

$$x \rightharpoonup c := \sum c_1 \langle x, c_2 \rangle \quad (x \in C^*, c \in C)$$

と書くことにする. そうすると, ある $c \in C$ を固定して $V = C^* \rightharpoonup c$ を考えると, $\Delta c = \sum c_1 \otimes c_2$ は有限和だから, V は有限次元 C^*-submodule となる. これが C の右 coideal になることをまず示そう.

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

[1] 4 月 22 日のノートを参照

[2] これも 4 月 22 日のノートを参照

$C = V \oplus V'$ なる C の subspace V' を適当にとる．ここで, 任意の $v \in V$ をとり,

$$\Delta v = \sum_i v_i \otimes w_i + \sum_j v'_j \otimes w'_j \quad (v_i \in V, v'_j \in V', w_i, w'_j \in C)$$

と書けていたとする．ただし, $\{w'_j\}$ (有限個) は線形独立になるようにとっておく．すると $x_j \in C^*$ で, $\langle x_j, w'_l \rangle = \delta_{jl}$ となるような x_j たちが存在するので, それらを v にかければ,

$$V \ni x_j \rightharpoonup v = \sum v_i \langle x_j, w_i \rangle + v'_j$$

となり, これより $v'_j \in V \cap V' = \{0\}$ がいえるので, 結局各 $v'_j = 0$ ということになり, $\Delta v \in V \otimes C$ となることがわかる．よって, $\Delta V \subset V \otimes C$ となって, V が右 coideal であることがわかる．

一方, C を右 C^*-module として, その作用を

$$c \leftharpoonup x := \sum \langle x, c_1 \rangle c_2$$

と書くことにする．そして

$$D = C^* \rightharpoonup c \leftharpoonup C^*$$

とすると, D は有限次元 C^*-subbimodule となる．しかも, 上記の議論と同様にすれば, D が右 coideal かつ左 coideal となることがいえる．よって, この節の冒頭で述べたように D は C の有限次元 subcoalgebra となり, そして $c = \varepsilon \rightharpoonup c \leftharpoonup \varepsilon \in D$ より c を含むこともわかるので, これが求める subcoalgebra である． □

1.2 単純 coalgebra

定義 1.2 C が単純 coalgebra であるとは, $C \neq 0$ かつ, C の subcoalgebra は 0 と C しかないことをいう．(上の命題により, このとき C は必ず有限次元になる.)

一般に, C を有限次元 coalgebra とするとき, C の subcoalgebra D と, dual algebra C^* の両側 ideal $D^\perp$ が丁度 1 対 1 に対応するので, C が単純 coalgebra であれば, C^* の両側 ideal は 0 と C^* のみということになり, C^* は単純代数となることがわかる．逆に, 有限次元単純代数の dual coalgebra は単純 coalgebra である．言い替えると, 単純 coalgebra というのは, 単純代数の双対概念であるということができる．

例 1.3 $M_n(k)$ を n 次行列代数とすると, これは単純代数であることが知られている．よって, その dual coalgebra $M_n^c(k)$ は単純 coalgebra である．

例 1.4 K を k の有限次拡大体とする. 当然 K は k 上の単純代数である. よって, その dual coalgebra K^* は単純 coalgebra である. このとき, K は commutative なので, K^* は cocommutative となる.

実は cocommutative な単純 coalgebra はこれしかない. なぜなら, commutative な単純 algebra は必ず体になるから. 特に, k が代数閉体 ($k = \overline{k}$) であるとき, その有限次拡大体は k 自身しかないのだから, cocommutative な単純 coalgebra は必ず一次元となる.

例 1.5 $\mathrm{G}(C)$ を group-like 元全体とする. $g \in \mathrm{G}(C)$ に対し, kg という一次元の subcoalgebra を考えると, これは明らかに単純 coalgebra である. 逆に, $D = kc$ を一次元の subcoalgebra とすると, $\Delta D \subset D \otimes D$ より,

$$\Delta c = a(c \otimes c) \quad ({}^{\exists}a \in k)$$

となるが, 余結合律より $a\varepsilon(c)c = c$ となるから, $a\varepsilon(c) = 1$, すなわち, $a, \varepsilon(c) \in k^{\times}$, $a = \varepsilon(c)^{-1}$ がわかる. このとき $c' = a^{-1}c$ とおけば,

$$\Delta c' = a^2(c' \otimes c'), \quad \varepsilon(c') = 1$$

となるが, 再び余結合律により, $a^2\varepsilon(c')c' = a^2c' = c'$ となって $a^2 = 1$ がわかり, $c' \in \mathrm{G}(C)$, $D = kc'$ となることがいえる.

ということで, C の group-like 元と一次元 subcoalgebra とは 1 対 1 に対応する.

ひとつ注意として,

注意 1.6 C を $\{0\}$ でない coalgebra とすると, C は必ずある単純 subcoalgebra S を含む.

[証明] 先程の命題より, C はある有限次元 subcoalgebra $D \neq \{0\}$ を含む. このとき, D に含まれる $\{0\}$ でない subcoalgebra のうち次元が最小のものをひとつとり, それを S とすれば, S は単純 coalgebra である. □

これから少し, 単純 coalgebra の性質をいくつかみていくことにします. …多分これを発展させたのは Sweedler じゃないかと思いますけども…, もう一回 Sweedler の本を読み直すと, ここらへんのところが非常に冴えた書き方がしてあって, 非常に面白いなあと思うんですが.

補題 1.7 $C \supset D, E, S$ を subcoalgebras とする. もし S が単純で, $S \subset D + E$ ならば, $S \subset D$ または $S \subset E$ である.

[証明] 例えば $S \not\subset D$ とする．このとき $S \cap D$ は S の subcoalgebra で, S は単純だから, $S \cap D = \{0\}$ である．すなわち, $S + D \subset C$ は直和である．そこで, $x \in C^*$ で, $x|_S = \varepsilon$, $x|_D = 0$ なるものをとってくることができる．さて, 任意の $c \in S$ に対し, $S \subset D + E$ より, ある $d \in D$, $e \in E$ があって $c = d + e$ と書けるが,

$$\underbrace{x \rightharpoonup c}_{\varepsilon \rightharpoonup c = c} = \underbrace{(x \rightharpoonup d)}_{0} + (x \rightharpoonup e)$$

より,

$$c = x \rightharpoonup e \in E$$

となることがいえる．よって $S \subset E$ がいえた． □

…というわけで, なんともまあ鮮やかな証明だなあ, と, 感心しちゃいますが…．ちょっと鮮やかすぎて, はじめての人が分かんなかったりしたら困りますが (笑)．この補題は非常に有力で, 非常に応用がきく．

命題 1.8 $C \supset D_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$ を subcoalgebra の族とする．$C \supset S$ を単純 subcoalgebra とするとき, もし $S \subset \sum_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$ ならば, ある $\alpha \in \Lambda$ があって, $S \subset D_\alpha$ となる．

[証明] S は有限次元なので, ある有限個の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ があって, $S \subset D_{\alpha_1} + \cdots + D_{\alpha_n}$ となる．この n についての帰納法で証明できる．$n = 1$ のときは明らか．$n > 1$ のとき, 上の補題により, $S \subset D_{\alpha_1}$ または $S \subset D_{\alpha_2} + \cdots + D_{\alpha_n}$ となるが, 後者のときは帰納法の仮定により, ある α_i があって $S \subset D_{\alpha_i}$ となる． □

以下, $\mathcal{S}(C)$ と書いて, C の単純 subcoalgebra 全体をさすものとする．このとき次の命題が成り立つ:

命題 1.9 $\mathcal{S}(C)$ は C で直和をなす．すなわち, $\mathcal{S}(C) = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とすると,

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \subset C.$$

[証明] 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$S_\lambda \cap (\sum_{\mu \neq \lambda} S_\mu) = \{0\}$$

となることを示せば良い．矛盾を導くため,

$$S_\lambda \cap (\sum_{\mu \neq \lambda} S_\mu) \neq \{0\}$$

であったと仮定しよう．そうすると S_λ は単純だから,

$$S_\lambda = S_\lambda \cap (\sum_{\mu \neq \lambda} S_\mu) \subset \sum_{\mu \neq \lambda} S_\mu$$

となる. すると先程の補題より, ある μ $(\neq \lambda)$ があって $S_\lambda \subset S_\mu$ となる. このとき S_μ も単純だから, $S_\lambda = S_\mu$ であることになってしまい, 矛盾が生じる. □

この命題は非常に便利で, 例えば次のような結果を導くことができる:

系 1.10 $\mathrm{G}(C)$ の元たちは互いに線形独立である.

[証明] 各 $g \in \mathrm{G}(C)$ について, $kg \in \mathcal{S}(C)$ である. また, $g_1, g_2 \in \mathrm{G}(C)$, $g_1 \neq g_2$ ならば $kg_1 \neq kg_2$ である. そして kg たちは直和になっている:

$$\bigoplus_{g \in \mathrm{G}(C)} kg \subset C$$

のであるから, $\mathrm{G}(C)$ たちの元は互いに線形独立である. □
これは直接証明することもできますけれども, 実はそれは必要なかったわけです.

1.3 既約 coalgebra, pointed coalgebra

既約 coalgebra の説明に入る前に, 環論の知識を少し補足する. 代数学の本には大体載っている話であるが, 有限次元 algebra A に対し, 次のことが知られている:

(i) Jacobson 根基と呼ばれるある特別な (両側) ideal $I \subset A$ があって, 次の性質をもつ:

(1) I は巾零である ($I^n = 0$, $^\exists n$).

(2) A/I は半単純 (i.e. 単純代数たちの直積と同型) である.

(2) はつまり,

$$A/I \simeq B_1 \times \cdots \times B_r \quad (\text{各 } B_i \text{ は単純代数})$$

と書けるということだが, さらに Wedderburn の定理というのがあって, k を中心に含むようなある有限次元 division algebra (非可換体) D_i があって, 各 B_i は $B_i \simeq M_{n_i}(D_i)$ と行列代数の形に書けることが知られている.

(ii) r を上のようにとると, A の極大 ideal は実は r 個しかない. それらを $M_1, \cdots, M_r$ とすると, Jacobson 根基は $I = M_1 \cap \cdots \cap M_r$ と書ける.

特に $r = 1$, すなわち極大 ideal が一つしかないとき, A を local algebra という.
次に, A が有限次元可換 algebra であったとする. そうすると, ある十分大きな $N >> 0$ があって,

$$M_1^N \cap \cdots \cap M_r^N = \{0\}$$

となる．このとき

$$A \simeq A/M_1^N \times \cdots \times A/M_r^N$$

で, 各 A/M_i^N は local algebra である．すなわち, 有限次元可換代数は有限個の local algebra の直積に分解する．

例 1.11 $A = k[X]/(X^n)$ truncated polynomial algebra は local algebra で, その極大 ideal は $(X)/(X^n)$ となる．

…という話を coalgebra にもっていきたい, というのがこの小節の目標である．

今, 仮に C を有限次元 coalgebra とすると, C^* は有限次元 algebra で, C の subcoalgebra D に対して, C^* の ideal $D^\perp$ が丁度対応するのであった．このとき, 丁度 D が単純 subcoalgebra であるということと, $D^\perp$ が極大 ideal である, ということが対応している．したがって, C^* の極大 ideal 全体を $\mathrm{Max}(C^*)$ と書くならば, これは C の単純 subcoalgebra 全体 $\mathcal{S}(C)$ と 1 対 1 に対応している:

$$\mathcal{S}(C) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathrm{Max}(C^*).$$

ここで, $\mathrm{Max}(C^*)$ は有限集合だから, $\mathcal{S}(C)$ も有限集合である．とくに, その元の数がただ一つしかないとき, C^* は local algebra となる．

ということで, local algebra の双対概念として, 次のように既約[3] coalgebra を定義する:

定義 1.12 coalgebra C が既約とは, $\mathcal{S}(C)$ が一点からなることをいう．

特に, C が既約であれば $C \neq 0$ である．

例 1.13 divided powers $B_\infty = \bigoplus_{n=0}^\infty kd_n$ を考える．これの coalgebra 構造は

$$\Delta d_n = \sum_{i=0}^n d_i \otimes d_{n-i}, \quad \varepsilon d_n = \delta_{0n}$$

というものであった．今, $S \subset B_\infty$ を単純 subcoalgebra とすると, S は有限次元だから, ある n があって,

$$S \subset D = kd_0 + kd_1 + \cdots + kd_{n-1}$$

のようになっているはずである．上記の D は n 次元の subcoalgebra であって, dual algebra $B_\infty^* \simeq k[[X]]$ (4 月 15 日のノートの例 1.5 を参照) の中で, $D^\perp$ は

$$D^\perp = k[[X]] \cdot X^n = (X^n)$$

[3] colocal と呼ぶ人もいる

という ideal になっている．これが極大になるのは $n=1$ のときのみだから, 結局,

$$S = kd_0$$

がいえる．すなわち B_∞ の単純 subcoalgebra は kd_0 唯一つしかない．よって, B_∞ は既約 coalgebra である．

注意 1.14 C を既約 coalgebra とする．このとき $C \supset D, E$ が subcoalgebra で $D \neq 0$, $E \neq 0$ ならば, $D \cap E \neq 0$ である．なぜなら, $\mathcal{S}(C) = \{S\}$ とすると, D, E は共に S を含むから．

逆に, coalgebra C について, 任意の subcoalgebras $C \supset D, E$ s.t. $D \neq 0$, $E \neq 0$ に対し $D \cap E \neq 0$ となるとすると, 命題 1.9 より, C が既約であることがいえる．従って, この性質によって既約 coalgebra を特徴づけることもできる．

命題 1.15 C を coalgebra, $C \supset S$ をある単純 subcoalgebra とする．このとき, S を含む C の既約 subcoalgebra の中で最大のものが存在する．

[証明] $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を, S を含む C の既約 subcoalgebra の全体とする．S 自身既約だから, 少くともこの族は空ではない．ここで

$$D = \sum_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha$$

とするとき, D が既約 subcoalgebra であることがいえれば, それが求める最大のものである．T を D に含まれる任意の単純 subcoalgebra とすると, 命題 1.8 により, ある α があって, $T \subset D_\alpha$ となるが, D_α は既約なのであったから, $T = S$ となることがいえる．よって D も既約 subcoalgebra である． □

定義 1.16 $S \in \mathcal{S}(C)$ に対し, S を含む最大の既約 subcoalgebra を C^S と書き, C における S の既約成分 (irreducible component, 略して IC) と呼ぶ．特に $g \in \mathrm{G}(C)$ のとき, $C^g := C^{kg}$ と書き, g の pointed IC (PIC) と呼ぶ．

定義 1.17 coalgebra C が pointed とは,

$$\mathcal{S}(C) = \{kg \mid g \in \mathrm{G}(C)\}$$

となる (i.e. C の単純 subcoalgebra がすべて 1 次元である) ことをいう．

例 1.18 $k = \overline{k}$ (代数閉体) で, C が cocommutative であるとき, 自動的に C は pointed になる．なぜなら C の単純 subcoalgebra もすべて cocommutative だから, その dual algebra は k の有限次元拡大体となるはずだが, k が代数閉体であることにより, 1 次元のものしかないことがいえるから．

命題 1.19 C^S $(S \in \mathcal{S}(C))$ たちは C の中で直和をなす. すなわち,

$$\bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} C^S \subset C$$

となっている.

[証明] $S \in \mathcal{S}(C)$ を任意にひとつとり fix したときに,

$$C^S \cap (\sum_{T \neq S} C^T) = \{0\}$$

となることをいえばよい. 矛盾を導くため,

$$C^S \cap (\sum_{T \neq S} C^T) \neq \{0\}$$

であったとしよう. すると $C^S \cap (\sum_{T \neq S} C^T)$ はある単純 subcoalgebra U を含むはずである. このとき $U \subset C^S$ で, C^S は既約だから, $U = S$ がいえる. 一方 $U \subset \sum_{T \neq S} C^T$ より, ある T があって $U \subset C^T$, したがって $U = T$ となることがいえるが, $T \neq S$ だからこれは矛盾である. □

この命題の系として, 直ちに次がいえる.

系 1.20 C^g $(g \in \mathrm{G}(C))$ たちは C の中で直和をなす:

$$\bigoplus_{g \in \mathrm{G}(C)} C^g \subset C.$$

さて, $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} C^S$ と C とは一般には等しくないが, もし C が cocommutative であれば等しいことがいえる:

命題 1.21 C が cocommutative であれば,

$$C = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} C^S$$

となる.

[証明] $C \supset D$ を任意の有限次元 subcoalgebra とする. このとき dual algebra D^* は有限次元可換 algebra だから,

$$D^* \simeq A_1 \times \cdots \times A_n \quad ({}^{\exists}A_i : \text{local algebra } (i = 1, \cdots, n))$$

と local algebra たちの直積で書ける．これの双対をとれば,

$$D \simeq A_1^* \oplus \cdots \oplus A_n^*$$

となって, 各 A_i^* は既約 coalgebra となるから, D は有限個の既約 coalgebra たちの直和として書けることがいえる．ここで, 各 i について, $S_i \subset A_i^*$ なる単純 subcoalgebra $S_1, \cdots, S_n$ をとり, $C^{S_1}, \cdots, C^{S_n}$ を考えれば,

$$D \subset C^{S_1} + \cdots + C^{S_n} \subset \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} C^S$$

となることがわかる．特に, 命題 1.1 より, C の任意の元は $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} C^S$ に入っている． □

この命題により, cocommutative な coalgebra の研究は, 既約なものの研究に帰着することがわかる.