代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 5 月 20 日

1 ホップ代数 (その 4)

1.1 ホップ代数

bialgebra のうち, ある良い性質を満たすものを Hopf algebra というのだが, それは丁度半群と群との違いのようなものである.

半群	群
R 環	$R^\times$ 単元の群
$M_n(k)$	$GL_n(k)$
|	|
(bialgebra)	(Hopf 代数).

今回は, Hopf algebra の定義を行ない, いくつかの例をみていくことにする.

1.1.1 準備 (k-algebra としての Hom)

C を coalgebra, A を algebra とするとき, $\mathrm{Hom}(C, A)$ には次のような積をいれることができる: $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ に対し, $f * g$ を

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) \quad (c \in C)$$

によって決める. これは, map の合成で書くならば,

$$f * g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

である．この積は結合律を満たす:

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(c) &= \sum (f*g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)(g*h)(c_2) \\ &= (f*(g*h))(c).\end{aligned}$$

さらに, C の余単位射 ε と A の単位射 u との合成:

$$u\varepsilon : C \xrightarrow{\varepsilon} k \xrightarrow{u} A \ \in \mathrm{Hom}(C, A)$$

を考えると, $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$, $c \in C$ に対し, 余単位律 $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2)$ より,

$$\begin{aligned}((u\varepsilon)*f)(c) &= \sum (u\varepsilon)(c_1)f(c_2) \\ &= \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) \\ &= f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\ &= f(c), \\ (f*(u\varepsilon))(c) &= \sum f(c_1)(u\varepsilon)(c_2) \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) \\ &= f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) \\ &= f(c)\end{aligned}$$

となって $(u\varepsilon)*f = f = f*(u\varepsilon)$ がわかる．すなわち $u\varepsilon$ は $*$ に関する単位元となる．以上により, $\mathrm{Hom}(C, A)$ は, 積 $*$ と単位元 $u\varepsilon$ に関して k-algebra となることがわかった.

例 1.1 coalgebra C に対し, $C^* = \mathrm{Hom}(C, k)$ の, $*$ による algebra 構造と dual algebra としての algebra 構造とは一致する．実際, dual algebra の積はどうなっていたかというと,

$$m : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

で, $f, g \in C^* = \mathrm{Hom}(C, k)$ に対し,

$$(fg)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) = (f*g)(c)$$

だから, 全く一致している．dual algebra の単位元は ε だから, 単位射も一致する.

$\alpha : A \to B$ を algebra map とするとき, これに対して induce される線形写像

$$\begin{array}{rcl} \bar{\alpha} : \mathrm{Hom}(C, A) & \to & \mathrm{Hom}(C, B) \\ f & \mapsto & \alpha \circ f \end{array}$$

は algebra map である. なぜなら, 次の図式が可換:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[r, "f \otimes g"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\alpha \otimes \alpha"] & A \arrow[d, "\alpha"] & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & k \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
C \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[r, "\bar{\alpha}(f) \otimes \bar{\alpha}(g)"] & B \otimes B \arrow[r, "m"] & B & C \arrow[r, "\varepsilon"] & k \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

なので, $\bar{\alpha}(f * g) = \bar{\alpha}(f) * \bar{\alpha}(g)$, $\bar{\alpha}(u\varepsilon) = u\varepsilon$ となるから.

また, $\beta : C \to D$ を coalgebra map とするとき, これに対して induce される線形写像

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\beta} : \mathrm{Hom}(D, A) & \to & \mathrm{Hom}(C, A) \\ f & \mapsto & f \circ \beta \end{array}$$

も algbra map である. これも,

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\Delta"] & D \otimes D \arrow[r, "f \otimes g"] & A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\varepsilon"] & k \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, "\beta"] & C \otimes C \arrow[r, "\widetilde{\beta}(f) \otimes \widetilde{\beta}(g)"] \arrow[u, "\beta \otimes \beta"] & A \otimes A \arrow[r, "m"] & A & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "\beta"] & k \arrow[r, "u"] & A
\end{tikzcd}$$

が可換であることにより $\widetilde{\beta}(f * g) = \widetilde{\beta}(f) * \widetilde{\beta}(g)$, $\widetilde{\beta}(u\varepsilon) = u\varepsilon$ となることにより従う.

1.1.2 Hopf algebra の定義

H を bialgebra とする. このとき $\mathrm{Hom}(H, H)$ は $*$ により algebra の構造をもつ. H が Hopf algebra であるとは, $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}(H, H)$ が $*$ に関して逆元 S をもつ:

$$\mathrm{id} * S = u\varepsilon = S * \mathrm{id} \quad ({}^{\exists} S \in \mathrm{Hom}(H, H))$$

ことをいう. このとき S を antipode と呼ぶ. なお, $S \in \mathrm{Hom}(H, H)$ が antipode であるための条件を sigma 記法で言い替えてみると,

$$\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) 1 = \sum S(h_1) h_2 \quad ({}^{\forall} h \in H)$$

となる.

例 1.2 G を群とするとき, $H = kG$ (群環) は $\Delta g = g \otimes g$, $\varepsilon g = 1$ $(g \in G)$ なる coalgebra 構造 (Δ, ε) によって bialgebra の構造をもつ[1]. このとき, $S : kG \to kG$ を, $S(g) = g^{-1}$ $(g \in G)$ なる線形写像として定めると, $gS(g) = 1 = S(g)g$ より, S が antipode となり, kG が Hopf algebra の構造をもつことがわかる.

[1] 5 月 13 日のノートの例 1.2 を参照

ここで, もうちょっと先に進む前に, antipode S というものの性質について一言. 上の S は群の逆元をとる操作なので, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ より,

$$S(gh) = S(h)S(g), \quad S(1) = 1$$

という性質をもつ. これが任意の $g, h \in H$ について成立する. 一般に, 上の条件を満たす線形写像を anti-algbra map という. これは一般の antipode についていえる:

補題 1.3 H を Hopf algebra, S をその antipode とするとき, $S : H \to H$ は anti-algebra map である.

これの証明は, 群における $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ の証明と似た方法を用いる. $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ の証明としては,

$$(gh)^{-1}(gh)(h^{-1}g^{-1})$$

を二通りに計算して結果をみてみる, という方法がある. すなわち, $(gh)^{-1}(gh)$ のところを先に計算すれば $h^{-1}g^{-1}$ がでてくるし, $(gh)(h^{-1}g^{-1})$ のところを先に計算すれば $(gh)^{-1}$ がでてくる, という証明である. これと同じような方法で上の補題を証明してみよう.

[補題の証明] H は bialgebra だから $\Delta(gh) = \sum g_1h_1 \otimes g_2h_2$ である. そこで,

$$\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3)$$

を二通りに計算することを考える. まず $S(g_1h_1)g_2h_2$ の部分に着目して計算していくと,

$$\begin{aligned}
\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3) &= \sum \varepsilon(g_1h_1)S(h_2)S(g_2) \\
&= \sum \varepsilon(g_1)\varepsilon(h_1)S(h_2)S(g_2) \quad (※) \\
&= S(h)S(g)
\end{aligned}$$

となる. (※) の部分は, S が線形写像であることと, 余単位律 $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c$ より, $\varepsilon(g_1), \varepsilon(h_1)$ を $S(g_2), S(h_1)$ の方に "くりこんで" いくことができる, ということである. さて, 次に $g_2h_2S(h_3)S(g_3)$ の部分に着目して計算していくと,

$$\begin{aligned}
\sum S(g_1h_1)g_2h_2S(h_3)S(g_3) &= \sum S(g_1h_1)g_2\varepsilon(h_2)S(g_3) \quad (\leftarrow \varepsilon(h_2) \text{ をくりこむ}) \\
&= \sum S(g_1h)g_2S(g_3) \\
&= \sum S(g_1h)\varepsilon(g_2) \quad (\leftarrow \varepsilon(g_2) \text{ をくりこむ}) \\
&= S(gh)
\end{aligned}$$

となって, $S(gh) = S(h)S(g)$ がいえる. また, $\Delta 1 = 1 \otimes 1$ より,

$$S(1) = 1S(1) = \varepsilon(1)1 = 1$$

となることがわかる. □

また, 同様に, antipode は anti-coalgebra map になることもいえる:

補題 1.4 H を Hopf algebra, S をその antipode とするとき, S は anti-coalgebra map, すなわち, S は

$$\Delta S(h) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1), \quad \varepsilon S(h) = \varepsilon(h) \qquad ({}^\forall h \in H)$$

を満たす線形写像である.

[証明] 上でやったのと dual だ, といえば一言で済んでしまうが, 初心者に分かりやすい証明でやってみる. ということで, 今度は

$$\sum (\Delta S(h_1))(\Delta h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3))$$

を二通りに計算することを考える. こういうところで sigma notation の使い方を学んで欲しいんですが…. まず, $(\Delta h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3))$ の方を先に消すことを考えると,

$$\begin{aligned}
& \sum (\Delta S(h_1))(\Delta h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
= & \sum (\Delta S(h_1))(h_2 \otimes h_3)(S(h_5) \otimes S(h_4)) \\
= & \sum (\Delta S(h_1))(h_2 S(h_5) \otimes h_3 S(h_4)) \\
= & \sum (\Delta S(h_1))(h_2 S(h_4) \otimes \varepsilon(h_3)1) \quad (\leftarrow \varepsilon(h_3) \text{ をくりこむ}) \\
= & \sum (\Delta S(h_1))(h_2 S(h_3)) \otimes 1 \quad (\leftarrow \text{上と同様に } h_2 S(h_3) \text{ のところは消える}) \\
= & \Delta S(h)(1 \otimes 1) \\
= & \Delta S(h)
\end{aligned}$$

となる. 一方, $(\Delta S(h_1))(\Delta h_2)$ のを消すように計算すると, Δ は algebra map であったから,

$$\begin{aligned}
\sum (\Delta S(h_1))(\Delta h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) &= \sum \Delta(S(h_1)h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
&= \sum (1 \otimes 1)(S(h_2) \otimes S(h_1)) \\
&= \sum S(h_2) \otimes S(h_1)
\end{aligned}$$

となる. よって, $\Delta S(h) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$ がいえた. また, $\varepsilon S(h) = \varepsilon h$ の方は,

$$(\varepsilon h)1 = \sum S(h_1)h_2$$

の両辺に S をかけると, 前補題の結果から,

$$(\varepsilon h)1 = \sum S(h_2)S^2(h_1) = (\varepsilon S(h))1$$

となることにより, 証明できる. □

また, 次の補題を用意しておくと後々便利である. anti-algebra map がどんなときに antipode になってくれるのか, ということで,

補題 1.5 H を bialgebra, $S : H \to H$ を anti-algebra map とする. もし, $X \subset H$ が algebra としての H を生成し, しかも, 任意の $x \in X$ について

$$\sum x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1 = \sum S(x_1)x_2$$

となるならば, S は H の antipode となる.

[証明]

$$A = \left\{ a \in H \mid \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a)1 = \sum S(a_1)a_2 \right\}$$

とおくと, 仮定より $X \subset A$, また $1 \in A$ である. この A が H の subalgebra になることを示せば, X が H を生成することから $A = H$ がいえて, 証明ができる.

まず, A が H の和やスカラー倍で閉じていることは簡単に分かる. あとは積で閉じていることをいえばよい. $a, b \in A$ について $\Delta(ab) = \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$ で,

$$\begin{aligned}
\sum a_1 b_1 S(a_2 b_2) &= \sum a_1 b_1 S(b_2) S(a_2) \\
&= \sum a_1 \varepsilon(b) S(a_2) \\
&= \varepsilon(b) \sum a_1 S(a_2) \\
&= \varepsilon(b)\varepsilon(a)1 \\
&= \varepsilon(ab)1, \\
\sum S(a_1 b_1) a_2 b_2 &= \sum S(b_1) S(a_1) a_2 b_2 \\
&= \sum S(b_1) \varepsilon(a) b_2 \\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b)1 \\
&= \varepsilon(ab)1
\end{aligned}$$

となるから, $ab \in A$ となる. よって A が H の subalgebra になることがいえた. □

この補題の応用として次のような例を考えてみよう:

例 1.6 L を Lie algebra, $H = U(L)$ をその普遍包絡環とする. H^{op} を, H の反対代数 (opposite algebra) — 積を逆に定義した algebra — とする. $S : L \to H^{\mathrm{op}}$ を $S(x) = -x$ $(x \in L)$ によって定めると,

$$\begin{aligned} & S(x) \cdot S(y) - S(y) \cdot S(x) \qquad (\text{in } H^{\mathrm{op}}) \\ = \ & (-x) \cdot (-y) - (-y) \cdot (-x) \qquad (\text{in } H^{\mathrm{op}}) \\ = \ & yx - xy \qquad (\text{in } H) \\ = \ & [y, x] \qquad (\text{in } L) \\ = \ & S([x, y]) \end{aligned}$$

となるので, S は Lie algebra map になっている. よって $H = U(L)$ の普遍性により, S を $S : H \to H^{\mathrm{op}}$ algebra map に拡張することができる. ここで, この H^{op} を H に直すと, これは $S : H \to H$ anti-algebra map ということになる.

上の補題で $X = L$ とすると, $x \in L$ に対し, $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $\varepsilon(x) = 0$ で,

$$1S(x) + xS(1) = -x + x = 0 = \varepsilon(x)1, \qquad S(1)x + S(x)1 = x + -x = 0 = \varepsilon(x)1$$

となるから, S が antipode となり, $H = U(L)$ が Hopf algebra となることがわかる.

1.1.3 Hopf algebra map, Hopf subalgebra, Hopf ideal

H を Hopf algebra, A を algebra, $\alpha : H \to A$ を algebra map とし, $\bar{\alpha} : \mathrm{Hom}(H, H) \to \mathrm{Hom}(H, A)$ を α から induce される algebra map とする. $\bar{\alpha}$ で id は α へ移るので, $S = (\mathrm{id})^{-1}$ は $*$ に関する α の逆元 $\alpha^{-1} = \alpha \circ S$ へと移る:

$$\alpha * \alpha^{-1} = \bar{\alpha}(\mathrm{id}) * \bar{\alpha}(S) = \bar{\alpha}(\mathrm{id} * S) = \bar{\alpha}(u\varepsilon) = u\varepsilon.$$

言い替えれば, $\alpha \in \mathrm{Hom}(H, A)$ が algebra map であれば, α には $*$ に関する逆元が存在し, それは $\alpha \circ S$ になっている, ということである. ただし, そのとき α^{-1} は anti-algebra map になってしまう. しかし, A を commutative とすれば, anti-algebra map と algebra map との区別はなくなってしまうので, H から A への algebra map 全体を $\mathrm{Alg}(H, A)$ と書くとき, これは $*$ を積として群をなす.

$\mathrm{Alg}(H, A)$ が積で閉じていることはそれほど自明でないので確かめておこう: まず, A が commutative だから,

$$\begin{aligned} m((a \otimes b)(a' \otimes b')) &= aa'bb' \\ &= aba'b' \\ &= m(a \otimes b)m(a' \otimes b') \end{aligned}$$

となって, $m : A \otimes A \to A$ も algebra map であることがわかる. すると, $\alpha, \beta \in \mathrm{Alg}(H, A)$ に対し

$$\alpha * \beta : H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

となるが, Δ, $\alpha \otimes \beta$, m はすべて algebra map だから, $\alpha * \beta \in \mathrm{Alg}(H, A)$ となって, 確かに積で閉じていることがわかる.

今のとまったく双対的に, C を coalgebra とし, $\beta : C \to H$ を coalgebra map とすると, β は逆元をもち $\beta^{-1} = S \circ \beta$ となる. このとき β^{-1} の方は anti-coalgebra map である. また, C が cocommutative であったとすると, C から H への coalgebra map 全体 $\mathrm{Coalg}(C, H)$ は $*$ を積として群をなす.

今度は H_1, H_2 を二つの Hopf algebra とし, $f : H_1 \to H_2$ を bialgebra map とする. このとき f^{-1} には二つの見方があることになる:

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f \circ S \quad \text{(algebra map とみた場合)} \\ &= S \circ f \quad \text{(coalgebra map とみた場合).} \end{aligned}$$

大事なのは, この両者が一致するということである. 言い替えれば, 次の図式が可換:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"] & H_2 \arrow[d, "S"] \\ H_1 \arrow[r, "f"] & H_2 \end{tikzcd}$$

になっている. すなわち, bialgebra map は自動的に Hopf algebra map でもある. … 時々, Hopf 代数の教科書なんかにこれをミスして, 上の可換図式を Hopf algebra map になるための条件のように書いている本もあるけれど, 実は bialgebra map であったら自動的に Hopf algebra map であることはでてくるんですね.

H を Hopf algebra, $H \supset K$ が subbialgebra で $S(K) \subset K$ である (antiopode で閉じている) ものとするとき, K を Hopf subalgebra という. また, $H \supset I$ が bi-ideal で, $S(I) \subset I$ なるものとするとき, I を Hopf ideal という. このとき quotient bialgebra H/I も Hopf algebra となる. これを quotient Hopf algebra という.

1.1.4 Hopf algebra の例

例 1.7 C を coalgebra, $S : C \to C$ を勝手な anti-coalgebra map とする. このとき tensor algebra $T(C)$ に bialgebra の構造が入ることは前にやった (Δ, ε が algebra map になるように拡張). ここで, $c \in C$ に対し

$$\begin{aligned} \phi(c) &= \sum c_1 S(c_2) - \varepsilon(c)1 \\ \psi(c) &= \sum S(c_1) c_2 - \varepsilon(c)1 \end{aligned}$$

(積は $T(C)$ の積) とおき, I を $\phi(c), \psi(c)$ $(c \in C)$ たちで生成される $T(C)$ の ideal とすると, I は $T(C)$ の bi-ideal となる. これを確かめてみると,

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(c) &= \sum \Delta c_1 \Delta S(c_2) - \varepsilon(c) 1 \otimes 1 \\
&= \sum (c_1 \otimes c_2)(S(c_4) \otimes S(c_3)) - \varepsilon(c) 1 \otimes 1 \\
&= \sum c_1 S(c_4) \otimes c_2 S(c_3) - \varepsilon(c) 1 \otimes 1 \\
&= \sum c_1 S(c_3) \otimes ((c_2)_1 S((c_2)_2) - \varepsilon(c_2) 1) + (\sum c_1 S(c_2) - \varepsilon(c) 1) \otimes 1 \\
&= \sum c_1 S(c_3) \otimes \phi(c_2) + \phi(c) \otimes 1 \quad \in T(C) \otimes I + I \otimes T(C),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(c) &= \sum (S(c_2) \otimes S(c_1))(c_3 \otimes c_4) - \varepsilon(c) 1 \otimes 1 \\
&= \sum (S((c_2)_1)(c_2)_2 - \varepsilon(c_2) 1) \otimes S(c_1) c_3 + 1 \otimes (\sum S(c_1) c_2 - \varepsilon(c) 1) \\
&= \sum \psi(c_2) \otimes S(c_1) c_3 + 1 \otimes \psi(c) \quad \in T(C) \otimes I + I \otimes T(C)
\end{aligned}$$

で, $\Delta I \subset T(C) \otimes I + I \otimes T(C)$ となることがわかる. また,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\phi(c) &= \sum \varepsilon(c_1)\varepsilon(c_2) - \varepsilon(c) \\
&= \varepsilon(\sum \varepsilon(c_1) c_2) - \varepsilon(c) \\
&= \varepsilon(c) - \varepsilon(c) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

となり, 同様に $\varepsilon\psi(c) = 0$ となるから $\varepsilon I = 0$ となって, I が bi-ideal となることがわかった.

さて, S を $S : T(C) \to T(C)$ anti-algebra map となるように拡張すると,

$$S(\phi(c)) = \sum S^2(c_2) S(c_1) - \varepsilon(c) 1 = \psi(S(c)),$$

同様に, $S(\psi(c)) = \phi(S(c))$ となるので, $S(I) \subset I$ がいえる. よって, S から anti-algebra map $S : T(C)/I \to T(C)/I$ が induce される. X を inclusion $C \hookrightarrow T(C)/I$ による C の像とすると, この X によって $T(C)/I$ が生成されるから, 補題 1.5 を用いれば, $T(C)/I$ が Hopf algebra, S がその antipode となることがわかる.

次に, 量子代数と関連した簡単な例として, 次のようなものがある:

例 1.8 (量子平面) $k \ni q \neq 0$ に対し, 量子平面 $k_q[x, y]$ を, 次のように定義される algebra とする:

- 生成元: x, y,

- 関係式: $yx = qxy$.

$x^i y^j$ $(i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ たちが $k_q[x, y]$ の基底になる.

x, y に対し,

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1 \otimes x + x \otimes y, & \varepsilon x &= 0 \\ \Delta y &= y \otimes y, & \varepsilon y &= 1 \end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta x &= (y \otimes y)(1 \otimes x + x \otimes y) \\ &= y \otimes yx + yx \otimes y^2 \\ &= q(y \otimes xy + xy \otimes y^2) \\ &= q(1 \otimes x + x \otimes y)(y \otimes y) \\ &= q \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

となるので, Δ を $\Delta : k_q[x, y] \to k_q[x, y] \otimes k_q[x, y]$ algebra map にまで拡張することができる. また, ε も algebra map に拡張すると, これらは余結合律, 余単位律をみたす:

$$\begin{aligned} \Delta 1 \otimes x + \Delta x \otimes y &= 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes y + x \otimes y \otimes y \\ &= 1 \otimes \Delta x + x \otimes \Delta y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon 1)x + (\varepsilon x)y &= x, \\ 1(\varepsilon x) + x(\varepsilon y) &= x. \end{aligned}$$

よって, これにより $k_q[x, y]$ は bialgebra となる.

さらにこれに y^{-1} を加えて $H = k_q[x, y, y^{-1}]$ を考える. x, y との関係式は

$$y^{-1}x = q^{-1}xy^{-1}, \quad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y$$

によって定める. $x^i y^j$ $(i \geq 0, j \in \mathbb{Z})$ が $k_q[x, y, y^{-1}]$ の基底となる. $\Delta y^{-1} = y^{-1} \otimes y^{-1}$, $\varepsilon y^{-1} = 1$ により先程の Δ, ε を拡張すれば, これにより $k_q[x, y, y^{-1}]$ も bialgebra となるが, 実は, さらにこれは Hopf algbra になる. antipode は次のように定める: まず, y, y^{-1} に対し

$$S(y) = y^{-1}, \quad S(y^{-1}) = y,$$

とし, x に対しては $1S(x) + xS(y) = (\varepsilon x)1 = 0$ となるように $S(x) = -xy^{-1}$ と定めれば, $x + S(x)y = 0$ ともなる. さらに,

$$\begin{aligned} S(y)S(x) &= -y^{-1}xy^{-1} \\ &= q^{-1}(-xy^{-2}) \\ &= q^{-1}S(x)S(y) \end{aligned}$$

等々となるので, S が anti-algebra map となるように $S : k_q[x, y, y^{-1}] \to k_q[x, y, y^{-1}]$ に拡張することができる. よって, 補題 1.5 より, これは antipode となる.

次の例の為に少し計算をしておく. まず, $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes y$ の各項は q-可換である. すなわち,

$$\begin{array}{c} (x \otimes y)(1 \otimes x) = x \otimes yx \\ \Big\uparrow q \text{ 倍} \\ (1 \otimes x)(x \otimes y) = x \otimes xy \end{array}$$

となっている. このことから実は何が分かるかというと, $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し,

$$\begin{aligned} (\Delta x)^n &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}_q (1 \otimes x)^i (x \otimes y)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}_q x^{n-i} \otimes x^i y^{n-i} \end{aligned}$$

となることがいえる. ただし,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}_q &= \begin{cases} \dfrac{(n)_q!}{(i)_q!(n-i)_q!} & (0 < i < n) \\ 1 & (i = 0, n), \end{cases} \\ (n)_q! &= (n)_q (n-1)_q \cdots (1)_q, \\ (n)_q &= \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \end{aligned}$$

としている.

例 1.9 (Taft 代数) 上記の例で, q は位数有限で, その位数が $n > 0$ であったとする ($k = \mathbb{C}$, $q = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とか). $I = \langle x^n, y^n - 1 \rangle \subset k_q[x, y, y^{-1}]$ を ideal とすると, 実はこれは Hopf ideal になる. quotient Hopf algebra $k_q[x, y, y^{-1}]/I$ は $x^i y^j$ $(0 \le i, j \le n)$ たちを基底とする n^2 次元の Hopf algebra となる. (これは Taft 代数と呼ばれる[2]. $n = 2$ のときは, これは "Sweedler の 4 次元 Hopf 代数" として有名.)

I が Hopf ideal であることは次のことからわかる. q の位数が n なので,

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}_q = \begin{cases} 0 & (0 < i < n) \\ 1 & (i = 0, n) \end{cases}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \Delta x^n &= 1 \otimes x^n + x^n \otimes y^n \in H \otimes I + I \otimes H, \qquad \varepsilon(x^n) = 0 \\ \Delta(y^n - 1) &= (y^n - 1) \otimes 1 + y^n \otimes (y^n - 1) \in H \otimes I + I \otimes H, \qquad \varepsilon(y^n - 1) = 0 \end{aligned}$$

[2]Taft 代数の一番簡単な場合, と言った方がいいかもしれない

より I が bi-ideal になることがわかり, さらに,

$$\begin{aligned} S(x^n) &= -q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n y^{-n} \in I, \\ S(y^n - 1) &= y^{-n} - 1 = -y^{-n}(y^n - 1) \in I \end{aligned}$$

より $S(I) \subset I$, すなわち I が Hopf ideal になることがわかる.

[記者注] H を commutative Hopf algebra とする. 先程確かめたように, 任意の commutative k-algebra A に対し, $\mathrm{Alg}(H, A)$ は $*$-積により群になる. したがってこのとき, commutative k-algebra の category から群の category への functor $\mathrm{Alg}(H, *)$ は k 上の affine group scheme となる. 実は, k 上の affine group scheme はすべてこの形をしている. また, $\mathrm{Alg}(H, *)$ の linear representation と H-comodule とが 1 対 1 に対応することが知られている. 詳しくは,

W. C. Waterhouse, "Introduction to Affine Group Schemes", Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, 1979.

を参照. なお, この本では, 単に Hopf algebra と書いて commutative Hopf algebra のことを意味しているので注意.