代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 5 月 13 日

1 ホップ代数 (その 3)

1.1 bialgebra

1.1.1 bialgebra の定義

A, B を algebra とするとき, $A \otimes B$ も自然に algebra の構造をもつ. 積は

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

とし, 単位元は $1 \otimes 1$ とすればよい.

他方, C, D を coalgebra とするとき, $C \otimes D$ はやはり自然に coalgebra となる. 余積などは (sigma 記法で書くと)

$$\begin{aligned} \Delta(c \otimes d) &= \sum (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2) \\ \varepsilon(c \otimes d) &= \varepsilon(c)\varepsilon(d) \end{aligned}$$

とすればよい.

定義 1.1 H が algebra かつ coalgebra で,

$$\Delta : H \to H \otimes H, \quad \varepsilon : H \to k$$

が algebra map であるとき, H を bialgebra という.

Δ, ε が algebra map であるという条件を具体的に書いてみると,

(i) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$,

(ii) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$,

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

(iii) $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)(y)$,

(iv) $\varepsilon(1) = 1$.

となる．ここで見方を変えると, (i) と (iii) は, H の積 $\begin{array}{rcl} m : H \otimes H & \to & H \\ x \otimes y & \mapsto & xy \end{array}$ が coalgebra map であることを意味していて, (ii) と (iv) は $\begin{array}{rcl} u : k & \to & H \\ \alpha & \mapsto & \alpha \cdot 1 \end{array}$ が coalgebra map であることを意味している．したがって, "m, u が coalgebra map である" ということを bialgebra の定義にしてもよい.

H を有限次元 bialgebra とすると, 双対空間 H^* には dual algebra かつ dual coalgebra の構造が入るが,

$$\begin{aligned} &m : H^* \otimes H^* \simeq (H \otimes H)^* \xrightarrow{\Delta^*} H^*, \\ &u : k \simeq k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} H^* \end{aligned}$$

が coalgebra map であることが, Δ, ε が algebra map であることから従うので H^* も bialgebra となることがわかる.

1.1.2 bialgebra の例

例 1.2 G を monoid とする．monoid というのは, 結合律を満たす演算をもち, 単位元が存在する集合のことをいう (逆元の存在は仮定しない)．kG を, G を基底とするベクトル空間とすると, G の積を自然に拡張することにより kG は algebra となる．これに coalgebra の構造を定める: まず,

$$\Delta g = g \otimes g, \quad \varepsilon g = 1 \quad (g \in G)$$

として, あとはそれぞれが algebra map になるように $\Delta : kG \to kG \otimes kG$, $\varepsilon : kG \to k$ へと拡張すればよい．これにより kG は bialgebra となる.

例 1.3 L を Lie algebra, ここでは例えば,

$$L = \mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in k \right\}$$

とする．L の基底は

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という風にとれ, これらはブラケット積で

$$
\begin{aligned}
[H, E] &= 2E \\
[H, F] &= -2F \\
[E, F] &= H
\end{aligned}
$$

という関係をみたす.

一般に, Lie 環 L に対し, L の普遍包絡環 $U(L)$ と呼ばれる k-algebra を定義することができる. 後でテンソル代数を使った定義について述べるが, だいたいどういうものかというと,

- ある線形写像 $L \xrightarrow{i} U(L)$ があって,

  $$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \quad (x, y \in L)$$

  となる.

- ある k-algebra A と線形写像 $L \xrightarrow{\phi} A$ があって

  $$\phi([x, y]) = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) \quad (x, y \in L)$$

  となるとき, それに対して必ずある algebra map $\bar{\phi} : U(L) \to A$ が unique に定まる.

すなわち, Lie algebra map について普遍性をもつような algebra のことをいう.
主な性質としては,

- i は単射である. そこで, $i : L \hookrightarrow U(L)$ により L は$U(L)$ に含まれていると考えて良い.

- PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) の定理. $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を L の基底とするとき, Λ に全順序を入れれば,

  $$e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n} \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots)$$

  の全体が $U(L)$ の基底をなす.

ということが成り立つことが知られている.

例えば $U(\mathfrak{sl}_2)$ は, 生成元 E, F, H と, 次の関係式:

$$
\begin{aligned}
HE - EH &= 2E \\
HF - FH &= -2F \\
EF - FE &= H
\end{aligned}
$$

により定義される. その基底は $\left\{E^iF^jH^k \mid i,j,k \geq 0\right\}$ である ($U(L)$ の積は, もはや行列の積ではないことに注意).

普遍包絡環をどうやって定めるのかというと, まず L のテンソル代数:

$$T(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T(L)_n, \quad (T(L)_0 = k, \quad T(L)_n = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{n} \ \ (n = 1, 2, \cdots))$$

をとり, I を $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x, y \in L)$ 全体の生成する $T(L)$ のイデアルとして,

$$U(L) = T(L)/I$$

と定めれば良い. 以下, $T(L)$ は L で生成される free algebra と考えて, その積は (紛らわしいので) $\otimes$ とは書かないことにする ($U(L)$ の積についても同様).

この $U(L)$ に自然に bialgebra の構造が入る. 方針としては, まず $L \xrightarrow{\Delta} U(L) \otimes U(L)$ を

$$\Delta[x, y] = \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x)$$

となるように定義する. そうすると $U(L)$ の普遍性により, ある algebra map $\bar{\Delta} : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$ が存在することがいえるので, その $\bar{\Delta}$ を $U(L)$ の余積として採用したい.

Δ を

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \quad (x \in L)$$

により定めると,

$$\begin{aligned}
& \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
= \ & (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) - (1 \otimes y + y \otimes 1)(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
= \ & (1 \otimes x)(1 \otimes y) - (1 \otimes y)(1 \otimes x) + (x \otimes 1)(y \otimes 1) - (y \otimes 1)(x \otimes 1) \\
= \ & 1 \otimes xy - 1 \otimes yx + xy \otimes 1 - yx \otimes 1 \\
= \ & 1 \otimes (xy - yx) + (xy - yx) \otimes 1 \\
= \ & 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1 \\
= \ & \Delta[x, y]
\end{aligned}$$

となって, ちゃんと関係式を満たすことがいえる. したがって, これを algebra map $\bar{\Delta} : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$ に一意に拡張することができる. 余結合律は, まず L 上の Δ については容易にいえる:

$$\begin{aligned}
1 \otimes \Delta x + x \otimes \Delta 1 &= 1 \otimes (1 \otimes x + x \otimes 1) + x \otimes (1 \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1 \\
&= (1 \otimes 1) \otimes x + (1 \otimes x + x \otimes 1) \otimes 1 \\
&= \Delta 1 \otimes x + \Delta x \otimes 1.
\end{aligned}$$

よって, あとは algebra map であることを考えれば, 例えば $x, y \in L$ について,

$$\bar{\Delta}(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = (\sum x_1 \otimes x_2)(\sum y_1 \otimes y_2) = \sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$$

なので,

$$\begin{aligned} \sum (xy)_1 \otimes \bar{\Delta}(xy)_2 &= (\sum x_1 \otimes \Delta x_2)(\sum y_1 \otimes \Delta y_2) \\ &= (\sum \Delta x_1 \otimes x_2)(\sum \Delta y_1 \otimes y_2) \\ &= \sum \bar{\Delta}(xy)_1 \otimes (xy)_2 \end{aligned}$$

等々となって, $\bar{\Delta}$ についても成立することがいえる.

また, $\varepsilon : U(L) \to k$ は, 各 $x \in L$ に対し $\varepsilon(x) = 0$ となるような algebra map としてとればよい. これにより $(U(L), \bar{\Delta}, \varepsilon)$ は coalgebra になり, しかも $\bar{\Delta}, \varepsilon$ はともに algebra map となるようにとったのだから, $U(L)$ は bialgebra となる.

[記者注] k の標数が 0 である場合, 実は coalgebra としては $U(L) \simeq B(L)$, すなわち Birkhoff-Witt coalgebra となっている. 実際, 任意の $x \in L$ に対し,

$$\{1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots\}$$

は infinite sequence of divided powers である.

以上の例の kG, $U(L)$ は cocommutative ($\Delta c = \sum c_2 \otimes c_1$) な bialgebra である. さらに, 実は (まだ定義していないが) 両方とも pointed な例になっている. その意味では重要である.

それから, cocommutative でなく, またそんなに難しくない例として, 次のようなものがある:

例 1.4 C を coalgebra, $T(C)$ を C のテンソル代数とする. すると, canonical な injection

$$i : C \hookrightarrow T(C)$$

があるが, これはある種の普遍性をもっている. すなわち, ある algebra A があって, $f : C \to A$ という線形写像が存在するとき, algebra map

$$\bar{f} : T(C) \to A$$

で, $\bar{f} \circ i = f$ となるものが唯一つ存在する (つまり f を一意に拡張することができる). $\bar{f}$ を構成するのは非常に簡単で, 単に

$$\bar{f}(c^1 \otimes \cdots \otimes c^n) = f(c^1) \cdots f(c^n) \quad (c^j \in C, \ \ j = 1, \ldots, n), \qquad \bar{f}(a) = a \cdot 1_A \quad (a \in k)$$

のようにすればよい (添字を上に書いたのは, sigma notation と紛らわしいからそうしただけ).

そこで, $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{i \otimes i} T(C) \otimes T(C)$ を拡張した algebra map を $\bar{\Delta} : T(C) \to T(C) \otimes T(C)$ と書き, $\varepsilon : C \to k$ を拡張した algebra map を $\bar{\varepsilon} : T(C) \to k$ と書けば, 自然に $(T(C), \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ は coalgebra の公理を満たす. $\bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}$ は algebra map だから, これは bialgebra になる.

C によっては, $T(C)$ は commutative でも cocommutative でもない bialgebra の例となっている.

commutative だが cocommutative でない例としては, 次のようなものがある:

例 1.5 行列代数 $M_n(k)$ を代数的半群とみなした場合…, これは (積に関して) 群ではなくて, 半群にはなりますけれども. この場合の「代数的」というのは, 「解析的ではない」という意味です. まあ, 「代数多様体」というときの意味ですね. それの, いわゆる座標環 $\mathcal{O}(M_n(k))$ をとります. 座標環ということは, その上の多項式環, ということです. 解析的な多様体だったら, その上の解析的関数全体ということになりますが, 代数多様体だったら代数的な写像だけを考えるわけですね. この場合は結局それが多項式環:

$$\mathcal{O}(M_n(K)) = k[X_{11}, \cdots, X_{nn}] \quad (n^2 \text{ 変数の多項式環})$$

になる. 意味づけとしては, 各 X_{ij} は,

$$\begin{array}{rcl} X_{ij} : M_n(k) & \to & k \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{ij} \end{array}$$

という写像だと思ってよい, ということです.

この $\mathcal{O}(M_n(k))$ に bialgebra の構造を入れる. すなわち coalgebra 構造

$$\begin{aligned} &\Delta : \mathcal{O}(M_n(k)) \to \mathcal{O}(M_n(k)) \otimes \mathcal{O}(M_n(k)) \\ &\varepsilon : \mathcal{O}(M_n(k)) \to k \end{aligned}$$

をうまく定義してやりたい. 結論としては行列余代数と同じように定義してやればよい:

$$\begin{aligned} &\Delta(X_{ij}) = X_{i1} \otimes X_{ij} + \cdots + X_{in} \otimes X_{nj}, \\ &\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

これにより $\mathcal{O}(M_n(K))$ は bialgebra になる.

1.1.3 group-like 元と primitive 元

定義 1.6 H を bialgebra とする. $x \in H$ について,
(i) $\Delta x = x \otimes x$, $\varepsilon x = 1$ のとき, x は group-like,
(ii) $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$, $\varepsilon x = 0$ のとき, x は primitive
という. H の group-like 元の全体を $\mathrm{G}(H)$, primitive 元の全体を $\mathrm{P}(H)$ と書いたりする.

primitive というのは, これで定着してしまったが, あまり良い名前ではないかもしれない. Lie-like と言った方がいいかも.
後で重要となるので, これらについていくつか基本的な性質を述べておく.

補題 1.7 $\mathrm{G}(H)$ の元たちは k 上線形独立である. すなわち, どの二つも異なる $\mathrm{G}(H)$ の元 $g_1, \cdots, g_n$ に対して, ある $c_1, \cdots, c_n \in k$ があって

$$c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n = 0$$

となったとすると, $c_1 = \cdots = c_n = 0$ である.

[記者注] これは直接証明できますが, 6 月 3 日のノートのように理解した方が良いかもしれません.

補題 1.8 $\mathrm{G}(H)$ は H の積に関して monoid の構造をもつ.

[証明] まず, $\Delta 1 = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$ より, $1 \in \mathrm{G}(H)$ であることがわかる. また, $g, h \in \mathrm{G}(H)$ に対して,

$$\begin{aligned} \Delta(gh) &= \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh, \\ \varepsilon(gh) &= \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1 \end{aligned}$$

より, $gh \in \mathrm{G}(H)$ となることがわかる. □

補題 1.9 H のブラケット積を $[x, y] = xy - yx$ によって定めると, $\mathrm{P}(H)$ は H の部分 Lie 環となる.

[証明] subspace になることは容易にわかる. また $x, y \in \mathrm{P}(H)$ に対して, 例 1.3 でやったような計算と同様にして

$$\Delta[x, y] = \Delta(xy - yx) = \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) = 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1$$

となることがわかり, また明らかに $\varepsilon[x, y] = 0$ だから, $[x, y] \in \mathrm{P}(H)$ となることがいえる. □

1.1.4 sub-bialgebra, bi-ideal, bialgebra map

H を bialgebra とするとき, $H \supset D$ が subalgebra かつ subcoalgebra ならば D も bialgebra となる. このとき D を sub-bialgebra という. 例えば $k\mathrm{G}(H)$ は H の sub-bialgebra である.

また, $H \supset I$ が ideal かつ coideal であるとき, H/I は quotient algebra かつ quotient coalgebra であって, それにより H/I は bialgebra となる. これを quotient bialgebra という. また, I を bi-ideal という.

例 1.10 行列余代数 $M_n^{\mathrm{c}}(k)$ に対して bialgebra $H = T(M_n^{\mathrm{c}}(K))$ を考える. I を, $xy-yx$ $(x, y \in H)$ なる元全体で生成される ideal とすると,

$$\begin{aligned} \Delta(xy - yx) &= 1 \otimes (xy - yx) + (xy - yx) \otimes 1 \in H \otimes I + I \otimes H, \\ \varepsilon(xy - yx) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

より, I は coideal にもなる. よって I は bi-ideal である. このとき quotient bialgebra H/I は $\mathcal{O}(M_n(k))$ と bialgebra として同型である.

H, H' を bialgebra とするとき, $f : H \to H'$ が algebra map かつ coalgebra map であるとき, f は bialgebra map であるという. このとき, image $f(H)$ は H' の sub-bialgebra で, $I = \mathrm{Ker}\, f$ は H の bi-ideal である. そして

$$H/I \simeq f(H)$$

は bialgebra としての同型になっている.

例 1.11 H を bialgebra, $H \supset C$ を subcoalgebra とするとき, injection $C \hookrightarrow H$ を algebra map

$$\phi : T(C) \to H$$

に拡張することができる. この ϕ は bialgebra map になっている. それは $C \hookrightarrow H$ が coalgebra map であることから容易にわかる.

このとき $\mathrm{Im}(\phi)$ は C の生成する H の部分代数であるが, ϕ が bialgebra map であることから, これは H の sub-bialgebra にもなっていることがわかる.

上の例で述べられていることはわりとよく使われる. 例えば応用例として次のようなことがいえる:

補題 1.12 $\mathrm{P}(H)$ の生成する subalgebra は sub-bialgebra である.

[証明]

$$\Delta \mathrm{P}(H) \subset k \otimes \mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(H) \otimes k$$

なので, $k+\mathrm{P}(H)$ は H の subcoalgebra になっている. $k+\mathrm{P}(H)$ の生成する subalgebra は $\mathrm{P}(H)$ の生成する subalgebra と一致するから, 上の例で述べられていることにより, sub-bialgebra となる. □

見方を変えて, $\mathrm{P}(H)$ の普遍包絡環 $U(\mathrm{P}(H))$ を考えてみる. $P(H) \hookrightarrow H$ は Lie algebra map とみることができるので, $U(\mathrm{P}(H))$ の普遍性より, ある algebra map $\varphi : U(\mathrm{P}(H)) \to H$ に拡張できるが, これは bialgebra map でもある. 上でいっている $\mathrm{P}(H)$ の生成する subalgebra とは φ の像に他ならない. 実は, $\mathrm{ch}\,(k) = 0$ のとき φ は単射で, $\mathrm{ch}\,(k) > 0$ のとき φ は単射にはならないことが知られている.