代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 4 月 22 日

1 ホップ代数 (その 2)

1.1 algebra と coalgebra (その 2)

1.1.1 sigma 記法

先週 coalgebra (C, Δ, ε) というのをやったが, これを扱うときに一番問題となるのは余積 $\Delta : C \to C \otimes C$ をどう扱うか, ということである.

一般には $c \in C$ について,

$$\Delta c = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \quad (a_i, b_i \in C)$$

のように書けるわけだが, 一般論をやるときに一々このように書くのは非常に面倒臭い. …ということで, これを単に

$$\Delta c = \sum c_1 \otimes c_2$$

と書くことがある. c_1 とか c_2 というのは c の下に添字をつけただけで, それだけで特に何かを意味しているというわけではない. ただこういうものを symbol として表す, ということである. これは '60 年代に Sweedler とハイネマン (?) によってなされた画期的な記号法と呼ばれていて, sigma 記法という.

例えば sigma 記法で余結合律を表しみると,

$$\sum \Delta c_1 \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta c_2$$

という感じになる. これはどこに Δ を施しても同じ, ということをいっている. そしてこれをさらに

$$= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

と書く．この c_1, c_2, c_3 それぞれが何かの元を表しているというわけではない．この三つで，「c に二回 Δ を施したもの」 を表す記号となる．さらにこれを繰り返せば，

$$\begin{aligned}\sum \Delta c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 &= \sum c_1 \otimes \Delta c_2 \otimes c_3 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \Delta c_3 \\ &= \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \otimes c_4\end{aligned}$$

という感じ．

一般に，Δ を $n-1$ 回繰り返す余積:

$$\Delta_{n-1} : C \to \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n}$$

を c にかけたものを

$$\Delta_{n-1} c = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_n$$

と書く．$c_1, \cdots, c_n$ 自体が何かを意味しているわけではなく，この n 個の組で 「c に $n-1$ 回 Δ を施したもの」 を表す記号となる．

この sigma 記法で余単位律を表してみると，

$$\sum \varepsilon(c_1) c_2 = c = \sum c_1 \varepsilon(c_2)$$

という風になる．

それから C^* が algebra (双対代数) になることを前回やったが，これの積を sigma 記法で書いてみると，$x, y \in C^*$, $c \in C$ に対し，

$$\langle xy, c \rangle = \sum \langle x, c_1 \rangle \langle y, c_2 \rangle$$

となる．

一般論をやる際には，慣れると非常に便利な記法である．

1.1.2 coalgebra map と algebra map

環の準同型というものがあったように，coalgebra の世界にも coalgebra map というものがある．$f : C \to D$ が coalgebra map であるとは，線形写像であって，次の図式が可換になっていることをいう:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

ここで, Δ, ε は C と D で同じ記号を用いている.

そうすると, すぐわかることとして, coalgebra map f があれば, その双対写像 $f^*: D^* \to C^*$ は algebra map になる. 上の左側の可換図式の双対をとって, さらに canonical map ρ を付け加えれば

$$\begin{tikzcd}
C^* & D^* \arrow[l, "f^*"'] \\
(C \otimes C)^* \arrow[u, "\Delta^*"] & (D \otimes D)^* \arrow[l, "(f\otimes f)^*"'] \arrow[u, "\Delta^*"] \\
C^* \otimes C^* \arrow[u, "\rho"] & D^* \otimes D^* \arrow[l, "f^*\otimes f^*"] \arrow[u, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

という可換図式を得るが, $\Delta^* \circ \rho$ が双対代数の積であった. つまり f^* は積と可換になる. また, 右側の図式は

$$f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_C$$

($\varepsilon_C, \varepsilon_D$ はそれぞれ C^*, D^* の単位元) となることを意味している.

この講義の目的は, pointed Hopf 代数というものをやることにあるので, そのために必要な準備を今している, ということになるわですが, 必要な準備もいろいろあって, 次は…

1.1.3 subcoalgebra, coideal

algebra には subalgebra とか ideal といった概念があるが, それの双対概念として subcoalgebra とか coideal というものがある. ただし, 実際には coideal は subalgebra と双対, subcoalgebra は ideal と双対, という関係になっている.

そのための準備として, ベクトル空間の部分空間同士のテンソル積についてちょっとだけ補足をする. V, W をベクトル空間, $V' \subset V$, $W' \subset W$ を部分空間とするとき, $V' \otimes W' \subset V \otimes W$ は部分空間となる. また, canonical な全射準同型

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \to & (V/V') \otimes (W/W') \\ v \otimes w & \mapsto & \bar{v} \otimes \bar{w} \end{array}$$

の kernel が何になるかというと, それは

$$V' \otimes W + V \otimes W'$$

となることが知られている. すなわち

$$0 \to (V' \otimes W + V \otimes W') \to V \otimes W \to (V/V') \otimes (W/W') \to 0$$

は完全列である.

[記者注] これは結構重要なので, 証明を書いておきます:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \otimes W & \to & ((V/V') \otimes W) \oplus (V \otimes (W/W')) \\ v \otimes w & \mapsto & (\bar{v} \otimes w, v \otimes \bar{w}) \end{array}$$

とおくと, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\bar{\varphi} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & V' \otimes W + V \otimes W' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & V \otimes W \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & (V \otimes W)/(V' \otimes W + V \otimes W') \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varphi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\varphi' \arrow[r] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[r] & (V/V') \otimes (W/W') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

ここで, φ' は φ の制限, $\bar{\varphi}$ は φ から induce される写像, 行および列はすべて exact である. ところが,

$$\operatorname{Ker}\varphi' = \operatorname{Ker}\varphi = (V' \otimes W) \cap (V \otimes W')$$

なので, 実は $\operatorname{Ker}\bar{\varphi} = 0$ である. 一方, (例えば five lemma を使って) $\bar{\varphi}$ が全射であることがいえるので, $\bar{\varphi}$ は同形である. (証明終)

一般に, k が体でない場合には同じようなことが成立するとは限りませんが, もし任意の k-module が flat であれば, 上と同じような証明ができて成立することがいえます. (注終了)

さて, C を coalgebra, $C \supset D, I$ を subspace とする. このとき,

- $\Delta D \subset D \otimes D$ のとき, D を subcoalgebra という. 実際このとき $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ が coalgebra になる.
- $\Delta I \subset I \otimes C + C \otimes I$, $\varepsilon I = 0$ のとき, I を (両側?) coideal という.

I が coideal のとき, 実は C/I も coalgebra になる. これは quotient coalgebra と呼ばれる. 以下, C/I がどのように coalgebra になるのかを説明する. まず余積はどのように決めるのかというと, 次の可換図式:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & C/I \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & I \otimes C + C \otimes I \arrow[r] & C \otimes C \arrow[r] & (C/I) \otimes (C/I) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

において, $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \to (C/I) \otimes (C/I)$ が C/I を経由していることをみて, それを C/I の余積とすればよい. つまり, $c \in I$ のとき $c \mapsto \sum c_1 \otimes c_2 \mapsto 0$ となること

をいえばよいが, それは上下の行が exact であることからすぐにわかる. これにより $\bar{\Delta} : C/I \to (C/I) \otimes (C/I)$ が induce される. それから, 同様にして, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C/I & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

から $\bar{\varepsilon} : C/I \to k$ が induce されて, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ が余代数になることがわかる. sigma 記法で書くなら, $\bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}$ はそれぞれ

$$\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_1 \otimes \bar{c}_2, \quad \bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$$

となる.

注意 1.1 $f : C \to D$ を coalgebra map とする. このとき $f(C)$ は D の subcoalgebra になる. また, $\operatorname{Ker} f$ は C の coideal となる. そして次の coalgebra としての同型が成立する:

$$C/\operatorname{Ker} f \simeq f(C).$$

先程, coideal と subalgebra, subcoalgebra と ideal が対応すると言ったが, その対応関係についてもう少し説明する.

$C \supset I$ を coideal とするとき, canonical な全射 coalgebra map:

$$C \to C/I$$

の双対を考えると,

$$(C/I)^* \hookrightarrow C^*$$

は単射 algebra map となる. $(C/I)^*$ というのは I の直交空間:

$$I^\perp := \{x \in C^* \mid \langle x, I \rangle = 0\} = (C/I)^*$$

である. よって $I^\perp$ は C^* の積で閉じており, しかも $I^\perp \hookrightarrow C^*$ が単射 algebra map なのだから, $I^\perp$ は C^* の subalgebra である.

また, $C \supset D$ を subcoalgebra とする. すると D はもちろん canonical な単射 coalgebra map:

$$D \hookrightarrow C$$

の image であるが, これの双対をとれば,

$$\begin{array}{ccc} C^* & \to & D^* \\ x & \mapsto & x|_D \end{array}$$

という全射 algebra map を得る. その kernel は $D^\perp$ で, これは algebra map の kernel なのだから, C^* の (両側) ideal になる.

例 1.2 前回やった, n 次行列余代数 $M_n^{\mathrm{c}}(k)$ を考える. 基底として,

$$\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

をとれば (これは前回は z_{ij} と書いていた),

$$\begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} e_{is} \otimes e_{sj} \\ \varepsilon e_{ij} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

であった. ここで,

$$I = \sum_{i>j} k e_{ij}$$

という subspace をとると, これは coideal になる. なぜかというと, $i > j$ ならば, 各 $s = 1, \cdots, n$ に対して $i > s$ または $s > j$ なので,

$$\Delta I \subset I \otimes C + C \otimes I$$

となるし, 明らかに $\varepsilon I = 0$ だから.

すると, $I^{\perp} = \sum_{i \leq j} k E_{ij}$ となるから, $M_n^{\mathrm{c}}(k)/I$ は上三角行列全体のなす代数と双対になる:

$$M_n^{\mathrm{c}}(k)/I \overset{\text{双対}}{\leftrightarrow} U_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}.$$

というわけで, algebra と coalgebra についてはこのくらいにします. 最近 Hopf 代数の教科書もいろいろでているんですが……, 今年のこの授業をやるのに, どういうふうなものに基づいてやろうかと考えたんですけど, やっぱり, Sweedler の "Hopf 代数" (1969 年), …やっぱりこれが一番よく書けているかなあ, と思いますね. この後阿部先生の…(聞き取り不能)…. その後しばらくなかったんですけど, いわゆる量子群がでてから, Montgomery の 1993 年の本がありましたね. 最近では, レクチャーノートの形なんですけど H. J. Schneider の本もでている. 他に最近, ルーマニアのグループなんかも書いているし, それから…(聞き取り不能) …. それから, 量子群の本の中に Hopf 代数の解説が書いてあることもあります. Kassel の本…, Kassel はわりと分かりやすく書いてますね. だけど Hopf 代数の専門家ではないので, ケアレスミスがあったりする.

やっぱり Sweedler の本が一番いいかなあ, と. ただ, 今の目でみるとどうでもいいようなことまで書いてあるので, 本当に必要なところだけひろっていけば, Sweedler の本が一番いいだろうと. 今, 現にそうしているんですが…. さしあたって必要なところだけをひろっている.

1.2 module と comodule

これも深くやろうとすればいくらでも深くできますが, そんなに難しいところは使わないので, とおりいっぺんにやっていきます.

1.2.1 module の定義と comodule の定義

A を algebra とする. M を左 A-module とすると, M は自動的に k-ベクトル空間となる. また, 分配律というのは A の作用

$$A \times M \to M$$

が双線形になる, ということを意味しているので, A の作用に関する結合律, 単位律などは, やはりベクトル空間のテンソル積を用いた可換図式で書き直すことができる.

すなわち, k-ベクトル空間 M が左 A-module であるとは, ある線形写像

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes M &\to M \\ a \otimes m &\mapsto am \end{aligned}$$

があって, 次の可換図式をみたすことをいう:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\psi"] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] & A \otimes M \arrow[d, "\psi"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[rr, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

これの矢印を逆にすることにより, comodule の概念が得られる. C を coalgebra, V をベクトル空間とし, 線形写像

$$\rho : V \to V \otimes C$$

が次の可換図式をみたすとする:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V \otimes C \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \\ V \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & V \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & & V \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ & V \otimes k & \end{tikzcd}$$

このとき (V, ρ) を右 C-comodule という. また, C が右からのテンソルではなく左からのテンソルだった場合には左 C-comodule と呼ぶ.

簡単な例をいくつかやっておくと,

例 1.3 (C, Δ) は右 C-comodule かつ左 C-comodule である.

例 1.4 $C = M_n^{\mathrm{c}}(k)$, $V = kx_1 \oplus \cdots \oplus kx_n$ ($x_1, \cdots, x_n$ を基底とする n 次元のベクトル空間) とする. このとき

$$\rho x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_{ij} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

により ρ を定めれば, (V, ρ) は右 C-comodule である. 実際,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \Delta e_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{s=1}^{n} e_{is} \otimes e_{sj}) \\
&= \sum_{1 \le i,s \le n} x_i \otimes e_{is} \otimes e_{sj}, \\
\sum_{i=1}^{n} \rho x_i \otimes e_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{s=1}^{n} x_s \otimes e_{si}) \otimes e_{ij} \quad (\leftarrow \text{ここで } i, s \text{ を入れ換えると,}) \\
&= \sum_{1 \le i,s \le n} x_i \otimes s_{is} \otimes e_{si}
\end{aligned}$$

となって余結合律がいえるし,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varepsilon e_{ij} = x_j \otimes 1$$

となるので, ε との可換性も O.k.

1.2.2 comodule の sigma 記法

comodule にも sigma 記法を導入する. (V, ρ) を右 C-comodule とするとき, $v \in V$ に対して,

$$\rho v = \sum_i v_i \otimes c_i \in V \otimes C$$

という感じになっているわけだが, これを

$$= \sum v_0 \otimes v_1$$

と書くことにする. 0 番目のところが V で, あと $1, 2, \cdots$ 番目のところが C の部分である. 例えば余結合律を sigma 記法で書いてみると,

$$\sum \rho v_0 \otimes v_1 = \sum v_0 \otimes \Delta v_1$$

となる. 先程同様, これをさらに

$$= \sum v_0 \otimes v_1 \otimes v_2$$

と書く. それから余単位律は,

$$v = \sum v_0 \varepsilon(v_1)$$

という風に書ける.

歴史的にいうと v_0 のところには $v_{(0)}$ とカッコがついていた:

$$\sum v_{(0)} \otimes v_1$$

んですが, いつのまにかカッコはつけなくなってきました. それから日本で Hopf 代数をパイオニア的に研究している土井さん (?) あたりは, これだとやっぱりどっちが V に入っているか分からないということで,

$$\sum v_{(V)} \otimes v_{(C)}$$

こう書いた. そうするとどっちが V に入っているかがわかりやすい. ただ残念ながらこれは流行らなくて, 今は $\sum v_0 \otimes v_1$ が使われている.

左 comodule の場合はどういう風につけるのかというと, 番号は左から右に増えていくようにつける. つまり, (W, λ) を左 C-comodule, $w \in W$ とした場合,

$$\lambda w = \sum w_{-1} \otimes w_0$$

こう書く. 余結合律は

$$\begin{aligned} \sum w_{-1} \otimes \lambda w_0 &= \sum \Delta w_{-1} \otimes w_0 \\ &= \sum w_{-2} \otimes w_{-1} \otimes w_0 \end{aligned}$$

となる.

1.2.3 subcomodule

V を右 C-comodule とする. V の subspace W が $\rho W \subset W \otimes C$ を満たすとき, W を V の subcomodule という. このとき, $(W, \rho|_W)$ も右 C-comodule となる. 実はこのときさらに V/W も右 C-comodule となる (quotient comodule という). 実際, 次の可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & V/W \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & W \otimes C \arrow[r] & V \otimes C \arrow[r] & (V/W) \otimes C \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \end{tikzcd}$$

において, $V \xrightarrow{\rho} V \otimes C \to (V/W) \otimes C$ が V/W を経由するので, それにより induce された写像 $\bar{\rho} : V/W \to (V/W) \otimes C$ をとれば, $(V/W, \bar{\rho})$ が右 C-comodule となる.

それから, (C, Δ) を, 右かつ左 C-comodule とみたとき, その右 subcomodule を右 coideal, 左 subcomodule のことを左 coideal という. すなわち,

$$\begin{aligned} I = \text{右 coideal} &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Delta I \subset I \otimes C \\ I = \text{左 coideal} &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Delta I \subset C \otimes I \end{aligned}$$

である. ところで一般に, $V \supset V'$, $W \supset W'$ subspace に対して

$$V \otimes W' \cap V' \otimes W = V' \otimes W'$$

となることに注意すると, ある $C \supset D$ subspace が左 coideal かつ右 coideal であれば D は subcoalgebra であることがいえる. なぜかというと,

$$\Delta D \subset C \otimes D \cap D \otimes C = D \otimes D$$

となるから.

$\cdots$ subcoalgebra を subalgebra, coideal を ideal と読みかえている人はこういったところでまごつくかもしれない. subcoalgebra が両側 ideal の双対概念なのである. しかし, 左 (右) coideal は左 (右) ideal の双対概念だと考えてよい. その辺, 読みかえをしっかりやっておかないと, 最初のうちはまごつくかもしれない.

1.2.4 comodule map

V, W を右 C-comodule とする. 線形写像 $f : V \to W$ が右 comodule map であるとは, 次が可換になることをいう:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & W \arrow[d, "\rho"] \\ V \otimes C \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] & W \otimes C \end{tikzcd} .$$

このときすぐわかることとして, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker}\, f$ はそれぞれ W, V の右 subcomodule である. そして,

$$V/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im} f$$

は comodule として同型である.

1.2.5 重要な coalgebra の例, kS

pointed な Hopf 代数がこの講義のテーマなのですが, そのときに決定的に必要になるのが, 前回も言いました kS という coalgebra です. S というのは何か集合で, $s \in S$ に対して

$$\Delta s = s \otimes s, \quad \varepsilon s = 1$$

と Δ, ε を定めたものでした.

実はこのとき, 右 kS-comodule は S-graded space と 1 対 1 に対応して, 完全に同一視できる. pointed Hopf 代数をやる場合に重要なのでそれについて説明します.

S-graded space というのは何かというと, ある k-vector space V で,

$$V = \bigoplus_{s \in S} V_s$$

s の元でパラメトライズされた部分空間による直和構造をもっているものをいう. これを $(V_s)_{s \in S}$ と表すこともある. V をどうやって kS-comodule とみなすかというと, $v \in V$, $v = \sum_{s \in S} v_s$ に対し,

$$\rho v := \sum_{s \in S} v_s \otimes s$$

により定めればよい. これで V は右 kS-comodule になる.

逆に, (V, ρ) を右 kS-comodule とする. このとき,

$$V_s = \{v \in V \mid \rho v = v \otimes s\}$$

とおくと, $V = \bigoplus_{s \in S} V_s$ になる.

[証明] まず V が V_s たちの和で書けることを示す. それには任意の $v \in V$ をとって $\rho v = \sum_{s \in S} w_s \otimes s$ と表すとき,

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} \rho w_s \otimes s &= \sum_{s \in S} w_s \otimes \Delta s \\ &= \sum_{s \in S} w_s \otimes s \otimes s \end{aligned}$$

となって, 各 s は kS の基底なので, $\rho w_s = w_s \otimes s$ すなわち $w_s \in V_s$ を得る. すると,

$$v = \sum_{s \in S} w_s \varepsilon(s) = \sum_{s \in S} w_s$$

となる. よって $V = \sum_{s \in S} V_s$ となることがわかった.

次に, 直和であることを示すため, 各 $s \in S$ に対して $t_s \in V_s$ をとって

$$\sum_{s \in S} t_s = 0$$

となったとする．このとき

$$0 = \rho 0 = \sum_s \rho t_s = \sum_{s \in S} t_s \otimes s$$

となるから, $t_s = 0$ ($^\forall s \in S$) である．よって,

$$V = \bigoplus_{s \in S} V_s$$

となることがいえた． □

1.2.6 comodule と module の関係

V を右 C-comodule とすると, これに左 C^*-module の構造を入れることができる．このため, comodule を考えるときには右 comodule で考えた方が記法上都合がいいことが多い．

$v \in V$ に対する $x \in C^*$ の作用を, sigma 記法を使って,

$$x \cdot v := \sum v_0 \langle x, v_1 \rangle$$

によって定める．これによって V が左 C^*-module になることを確かめてみることにしよう．$x, y \in C^*$, $v \in V$ とすると,

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot v) &= \sum x \cdot v_0 \langle y, v_1 \rangle \\ &= \sum v_0 \langle x, v_1 \rangle \langle y, v_2 \rangle \quad (\leftarrow \text{sigma 記法の極意!}) \\ &= \sum v_0 \langle xy, v_1 \rangle \\ &= (xy) \cdot v \end{aligned}$$

となって, 結合律が成り立つことがわかる．また,

$$\varepsilon \cdot v = \sum v_0 \langle \varepsilon, v_1 \rangle = \sum v_0 \varepsilon(v_1) = v$$

となるので, 単位律も O.k.

例 1.5 $C = M_n^{\mathrm{c}}(k)$, $C^* = M_n(k)$ とする．先程の例で, $V = kx_1 \oplus \cdots \oplus kx_n$ が右 C-comodule になることを説明した．ρ は

$$\rho x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_{ij}$$

によって定まるものであった. よって V には左 C^*-module の構造が自然に入るわけだが, それは具体的にはどういう構造になっているのかというと,

$$E_{pq} \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle E_{pq}, e_{ij} \rangle = \delta_{qj} x_p$$

という風になって, これは V を縦ベクトル空間だと思ったときの $M_n(k)$ の自然な作用と一致している.