代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 6 月 17 日

1 coradical filtration (その 1)

これは pointed Hopf 代数の構造を調べるときに使います.

1.1 filtered coalgebra, graded coalgebra

まずは, 最初に filtered coalgebra というものを定義します. C という coalgebra が filtered coalgebra とは,

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \qquad (C_0, C_1, C_2, \cdots \text{ は } C \text{ の subspaces s.t. } C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots)$$

subspace の列 $C_0, C_1, \cdots$ があって, 上のようになっていて, で, 条件として, 各 n に対して

$$\Delta C_n \subset \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i} \ (\subset C_n \otimes C_n)$$

となっていることをいう. 各 C_n は subspace といったけれども, 結局この条件から, 特に, 各 C_n は subcoalgebra となるわけです.

そうすると, filtered coalgebra C に対応して, graded coalgebra というものが定まる. それは, ベクトル空間としては

$$\mathrm{gr}(C) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n/C_{n-1} \quad (\text{ただし}, C_{-1} = \{0\})$$

こういうもの. これに, 余積など:

$$\bar{\Delta} : \mathrm{gr}(C) \to \mathrm{gr}(C) \otimes \mathrm{gr}(C)$$
$$\bar{\varepsilon} : \mathrm{gr}(C) \to k$$

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

を, C_0 上では C の Δ, ε と一致していて, かつ,

$$\begin{array}{l}\bar{\Delta} : C_n/C_{n-1} \to \bigoplus_{i=0}^{n} C_i/C_{i-1} \otimes C_{n-i}/C_{n-i-1}, \\ \bar{\varepsilon}|_{C_n/C_{n-1}} = 0 \text{ for } n = 1, 2, 3, \cdots\end{array}$$

となるように定めたい. $\bar{\varepsilon}$ の定め方は上からすぐわかる. $\bar{\Delta}$ のほうを定めるため, 各 $c \in C_n$ に対し,

$$\bar{\Delta}(\bar{c}) = (\bar{\Delta}_{i,n-i}(\bar{c}))_{i=0,\cdots,n} \quad (\bar{c} \text{ は } C_n \twoheadrightarrow C_n/C_{n-1} \text{ による } c \text{ の像})$$

と書いて, 各 $\bar{\Delta}_{i,n-i} : C_n/C_{n-1} \to C_i/C_{i-1} \otimes C_{n-i}/C_{n-i-1}$ を定める, ということを考えることにする. そのためには,

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \twoheadrightarrow C/C_{i-1} \otimes C/C_{n-i-1}$$

を C_n へ制限するということを考える. そうすると,

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \twoheadrightarrow C/C_{i-1} \otimes C/C_{n-i-1} \\
\cup & & \cup \\
C_n & \to & \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} C_0 \otimes C_n \\ + \\ \vdots \\ + \end{array}\right\} \to 0 \\ C_i \otimes C_{n-i} \to C_i/C_{i-1} \otimes C_{n-i}/C_{n-i-1} \\ \left.\begin{array}{l} + \\ \vdots \\ + \\ C_n \otimes C_0 \end{array}\right\} \to 0 \end{array} \right. \\
\cup & & \\
C_{n-1} & \to & \sum_{j=0}^{n-1} C_j \otimes C_{n-j-1} \to 0
\end{array}$$

のようになっているから, 上から

$$\bar{\Delta}_{i,n-i} : C_n/C_{n-1} \to C_i/C_{i-1} \otimes C_{n-i}/C_{n-i-1}$$

が引き起こされることがわかる. これにより $\bar{\Delta}$ を定めれば, $(\mathrm{gr}(C), \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ は coalgebra となる.

[記者注] $(\mathrm{gr}(C), \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ が coalgebra となることを確かめてみます (いつもは「記者注」とは断らずに時々こういうことをやってきましたが, 今回は, 下で使っている 「sigma 記法もどき」が適切かどうかよくわからないので…).

余結合律は C の余結合律から簡単にわかる．また, sigma 記法もどきとして, $c \in C_n$ に対し,

$$\Delta c = \sum (c_{01} \otimes c_{n2} + \cdots + c_{n1} \otimes c_{02}) \in \sum_{j=0}^{n} C_j \otimes C_{n-j}$$

と書くことにすると, $i = 0, \cdots, n$ に対し,

$$\bar{\Delta}_{i,n-i}\bar{c} = \sum \bar{c}_{i1} \otimes \bar{c}_{n-i,2}$$

で,

$$\bar{\Delta}\bar{c} = \sum (\bar{c}_{01} \otimes \bar{c}_{n2} + \cdots + \bar{c}_{n1} \otimes \bar{c}_{02})$$

という感じになる．さて, C の余単位律より,

$$c = \sum (\varepsilon(c_{01})c_{n2} + \underbrace{\cdots + \varepsilon(c_{n1})c_{02}}_{\in C_{n-1}})$$

であるから, C_n/C_{n-1} において,

$$\bar{c} = \sum \varepsilon(c_{01})\bar{c}_{n2}$$

となる．反対側に ε がかかっている場合も同様で, これにより余単位律もいえる[1].

例 1.1 L を N 次元 Lie 代数, L の基底を $x_1, \cdots, x_N$ とする．$U(L)$ を L の普遍包絡環とすると, これは coalgebra の構造をもつが,

$$C_0 = k,\ C_1 = k + L,\ C_2 = k + L + L^2,\ \cdots,\ C_n = k + L + \cdots + L^n,\ \cdots$$

とすることにより, filtered coalgebra ともなる．実際 $x \in L$ のとき

$$\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

だから,

$$\Delta C_1 \subset C_0 \otimes C_1 + C_1 \otimes C_0$$

となるし, 一般の C_n については,

$$C_n = \underbrace{C_1 \cdots C_1}_{n}$$

[1] $j = 1, 2, \cdots$ に対し $\bar{\varepsilon}|_{C_j/C_{j-1}} = 0$ となるように $\bar{\varepsilon}$ を定めたのはこのため.

だから,

$$\begin{aligned}\Delta C_n &= \Delta(C_1 \cdots C_1) \\ &\subset (C_0 \otimes C_1 + C_1 \otimes C_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (C_1)^i \otimes (C_1)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}\end{aligned}$$

となって, filtered coalgebra の条件を満たしていることがわかる.

PBW の定理より, 各 C_n/C_{n-1} は, $x_1, \cdots, x_N$ から作られる n 次の斉次多項式全体のなす空間と同型になる. よって,

$$\mathrm{gr}(U(L)) \simeq k[x_1, \cdots, x_N] \quad (\text{多項式環})$$

である. その余積 Δ は, 各 x_i について $\Delta x_i = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$ となるように自然に入れたものとなる.

1.2 coradical

C を coalgebra とし, $\mathcal{S}(C)$ を単純 subcoalgebra 全体からなる族とする. $\mathcal{S}(C)$ の元たちは C の中で直和をなすことを前にやったが, その直和を

$$\mathrm{cor}(C) := \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} S \subset C$$

と書くことにする. この $\mathrm{cor}(C)$ を C の coradical と呼ぶ. 以下, coradical の性質をいろいろ調べていくことにする.

まず, 準備として, 次の補題を証明しておく:

補題 1.2 C を coalgebra, $C \supset D$ を subcoalgebra とする. C の subcoalgebra の族 $\{X_\alpha\}$ で, $\sum_\alpha X_\alpha = \bigoplus_\alpha X_\alpha$ (直和) となっているものをとるとき,

$$D \cap (\bigoplus_\alpha X_\alpha) = \bigoplus_\alpha D \cap X_\alpha$$

である.

[証明] $D \cap (\bigoplus_\alpha X_\alpha) \supset \bigoplus_\alpha D \cap X_\alpha$ は明らか. 後は, 任意の $d \in D \cap (\bigoplus_\alpha X_\alpha)$ について, $d = \sum_\alpha d_\alpha$ $(d_\alpha \in X_\alpha)$ とかけているときに, 各 $d_\alpha \in D$ となることを示せばよい.

$X = \bigoplus_\alpha X_\alpha$ とする. 各 α について, ある $f_\alpha \in X^*$ で,

$$f_\alpha|_{X_\alpha} = \varepsilon, \quad f_\alpha|_{X_\beta} = 0 \quad (\beta \neq \alpha)$$

となるものがとれるが, このとき, 各 $x \in X_\beta$ について,

$$f_\alpha \rightharpoonup x = \sum x_1 \langle f_\alpha, x_2 \rangle = \begin{cases} \sum x_1 \varepsilon(x_2) = x & (\beta = \alpha) \\ 0 & (\beta \neq \alpha) \end{cases}$$

となる. すると, D は C の subcoalgebra だから,

$$D \ni f_\alpha \rightharpoonup d = \sum_\beta f_\alpha \rightharpoonup d_\beta = d_\alpha$$

となることがいえる. □

命題 1.3 $C \supset D$ を subcoalgebra とすると,

$$\mathrm{cor}(D) = D \cap \mathrm{cor}(C).$$

[証明] $\mathrm{cor}(D) \subset D \cap \mathrm{cor}(C)$ は明らか. 以下, $\supset$ を示す. $\mathrm{cor}(C) = \bigoplus_\alpha S_\alpha$ とすると, 各 α に対し, $D \cap S_\alpha$ は $\{0\}$ ($S_\alpha \not\subset D$ の場合) 又は S_α ($S_\alpha \subset D$ の場合) のどちらかでしかあり得ないから,

$$\begin{aligned} D \cap \mathrm{cor}(C) &= D \cap (\bigoplus_\alpha S_\alpha) \\ &= \bigoplus_\alpha D \cap S_\alpha \subset \mathrm{cor}(D) \end{aligned}$$

を得る. □

命題 1.4 C が有限次元のとき, $\mathrm{cor}(C)^\perp \subset C^*$ は巾零 ideal である.

[証明] C^* は有限次元 algebra だから, Jacobson 根基と呼ばれるある ideal $I \subset C^*$ が存在して, I は巾零, かつ,

$$C^*/I \simeq A_1 \times \cdots \times A_r \quad (\text{各 } A_i \text{ は単純代数})$$

と書ける. これの dual をとれば,

$$I^\perp = (C^*/I)^* \simeq A_1^* \oplus \cdots \oplus A_r^*$$

となる. $I^\perp$ は C の subcoalgebra で, しかも単純 subcoalgebra たちの直和で書けているから,

$$I^\perp \subset \mathrm{cor}(C)$$

がいえる. よって,

$$I \supset \mathrm{cor}(C)^\perp$$

がいえるが, I は巾零だから, $\mathrm{cor}(C)^\perp$ も巾零である. □

命題 1.5 $f : C \to D$ を coalgebra map とするとき,

$$f(\mathrm{cor}(C)) \supset \mathrm{cor}(f(C))$$

となる.

[証明] 前回のノートの命題 1.1 (A) と似たようなやり方で証明できる. $f(C)$ の任意の単純 subcoalgebra $S \in \mathcal{S}(f(C))$ をとる. S は有限次元だから, ある C の有限次元 subcoalgebra C' があって $S \subset f(C')$ となる. このとき $S \subset f(\mathrm{cor}(C'))$ $(\subset f(\mathrm{cor}(C)))$ となることがいえれば良い. そのためには $f(\mathrm{cor}(C'))^\perp$ が巾零であることがいえれば, 前回のノートと同様に証明ができる. 以下, $f(\mathrm{cor}(C'))^\perp$ が巾零であることを示そう.

全射 coalgebra map $C' \xrightarrow{f} f(C')$ の双対をとると, 単射 algebra map:

$$\begin{array}{ccc} (C')^* & \xleftarrow{f^*} & f(C')^* \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{cor}(C')^\perp & \leftarrow & f(\mathrm{cor}(C'))^\perp \end{array}$$

を得る. このとき前命題より $\mathrm{cor}(C')^\perp$ は巾零だから, $f(\mathrm{cor}(C'))^\perp$ も巾零であることがいえる. □

命題 1.6 C, D を coalgebras とすると,

$$\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D) \supset \mathrm{cor}(C \otimes D)$$

となる.

[証明] $S \in \mathcal{S}(C \otimes D)$ とすると, S は有限次元だから, ある C, D の有限次元 subcoalgebras C', D' があって $S \subset C' \otimes D'$ となる. ここで, $(\mathrm{cor}(C') \otimes \mathrm{cor}(D'))^\perp$ が巾零であることがいえれば, $S \subset \mathrm{cor}(C') \otimes \mathrm{cor}(D')$ がいえる.

$$(\mathrm{cor}(C') \otimes \mathrm{cor}(D'))^\perp = \mathrm{cor}(C')^\perp \otimes \mathrm{cor}(D') + \mathrm{cor}(C') \otimes \mathrm{cor}(D')^\perp$$

で, $\mathrm{cor}(C')^{\perp}, \mathrm{cor}(D')^{\perp}$ は巾零だから, やはり前回のノートの補題 1.1 (B) の証明と同様に, $(\mathrm{cor}(C') \otimes \mathrm{cor}(D'))^{\perp}$ が巾零であることがわかる. □

特に, C が pointed の場合は非常に扱いやすい:

命題 1.7 (pointed な場合) (1) C が pointed coalgebra ならば, $\mathrm{cor}(C) = k\mathrm{G}(C)$ (群環) である.

(2) $f : C \to D$ が coalgebra map, C は pointed coalgebra (あるいはより一般に, $\mathrm{cor}(C)$ が cocommutative) ならば, $\mathrm{cor}(f(C)) = f(\mathrm{cor}(C))$.

(3) coalgebra C, D のうち一方が pointed ならば, $\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D) = \mathrm{cor}(C \otimes D)$.

(4) C, D が共に pointed coalgebra ならば, $C \otimes D$ も pointed coalgebra となる.

(5) $f : C \to D$ を coalgebra map とし, C が pointed であったとすると, $f(C)$ も pointed である.

[証明] (1) 定義よりただちに

$$\mathrm{cor}(C) = \bigoplus_{g \in \mathrm{G}(C)} kg = k\mathrm{G}(C)$$

がわかる.

(2) $\mathrm{cor}(C)$ が cocommutative であったとする. このとき, $S \subset \mathrm{cor}(C)$ を任意の単純 subcoalgebra とするとき S も cocommutative であるから, $f(S)$ も単純 coalgebra となる (前回のノートの例 1.4 を参照). よって,

$$f(\mathrm{cor}(C)) = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}(C)} f(S) \subset \mathrm{cor}(f(C))$$

となる. これと先程の命題の結果とを合わせれば, $=$ がいえる.

(3) 先程の命題により $\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D) \supset \mathrm{cor}(C \otimes D)$ となる. 一方ここで, 例えば C が pointed であったとすると,

$$\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D) = (\bigoplus_{g \in \mathrm{G}(C)} kg) \otimes (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}(D)} S) = \bigoplus_{\substack{g \in \mathrm{G}(C) \\ S \in \mathcal{S}(D)}} kg \otimes S$$

となるが, 各 $kg \otimes S$ は $C \otimes D$ の単純 subcoalgebra であるから,

$$\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D) \subset \mathrm{cor}(C \otimes D)$$

がいえる. D が pointed であったときも同様.

(4) C, D が pointed coalgebra であるとき, (3) より, $C \otimes D$ の任意の単純 subcoalgebra は $\mathrm{cor}(C) \otimes \mathrm{cor}(D)$ の単純 subcoalgebra であるから, 特に 1 次元である. よって $C \otimes D$ も pointed であることがいえる.

(5) (2) より, $f(C)$ の任意の単純 subcoalgebra は $f(\mathrm{cor}(C))$ の単純 subcoalgebra となる. しかし, C は pointed であるから, $f(\mathrm{cor}(C))$ 任意の単純 subcoalgebra は一次元である. よって $f(C)$ も pointed である. □

1.3 coradical filtration

C を任意の coalgebra とするとき, ある canonical filtration:

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \quad C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots$$

で,

$$C_0 = \mathrm{cor}(C)$$

となるようなものがあって, C を filtered coalgebra とみることができる. その構成は意外と面倒臭い. この小節ではその filtration をどうやって構成するのか, ということをやっていきたい.

1.3.1 wedge 積について

canonical filtration を構成するための準備として, wedge 積という, C の subspace たちの間の積について解説する. C を coalgebra とするとき, C の subspaces X, Y に対し,

$$\begin{aligned} X \wedge Y &:= \mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \to C/X \otimes C/Y) \\ &= \Delta^{-1}(X \otimes C + C \otimes Y) \end{aligned}$$

により wedge 積 $X \wedge Y$ を定める. Δ の余結合律により, wedge 積に関しては結合律が成立する:

$$\begin{aligned} (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) \ (= X \wedge Y \wedge Z) \\ = \ \mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\Delta_2} C \otimes C \otimes C \to C/X \otimes C/Y \otimes C/Z). \end{aligned}$$

また, 単位律のようなことも成り立つ:

$$(\mathrm{Ker}\,\varepsilon) \wedge X = X \wedge (\mathrm{Ker}\,\varepsilon) = X.$$

これはなぜかというと, $C/\mathrm{Ker}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\varepsilon = k$ と考えて,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\sim"] & C \otimes C \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] & C/\mathrm{Ker}\,\varepsilon \otimes C/X \arrow[d, equal] \\ k \otimes C \arrow[r, equal] & k \otimes C \arrow[r] & k \otimes C/X \end{tikzcd}$$

という可換図式において, 上段の kernel が $C \xrightarrow{\sim} k \otimes C \to k \otimes C/X$ の kernel ($\simeq X$) と等しいことにより,

$$(\mathrm{Ker}\,\varepsilon) \wedge X = X$$

がいえるし, $X \wedge (\mathrm{Ker}\,\varepsilon) = X$ も同様にいえるから.

命題 1.8 $C^* \supset V, W$ subspaces に対し,

$$V^\perp \wedge W^\perp = (VW)^\perp$$

となる. 特に, C の subspaces X, Y に対し, $X \wedge Y = (X^\perp Y^\perp)^\perp$.

[証明]

$$\begin{aligned} & c \in (VW)^\perp \\ \Leftrightarrow\ & \{0\} = \langle VW, c\rangle = \langle V \otimes W, \Delta c\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \Delta c \in (V \otimes W)^\perp = V^\perp \otimes C + C \otimes W^\perp \\ \Leftrightarrow\ & c \in V^\perp \wedge W^\perp \end{aligned}$$

より従う. □

上の命題を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned} X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 &= ((X_1 \wedge X_2)^\perp X_3^\perp)^\perp \\ &= (((X_1^\perp X_2^\perp)^\perp)^\perp X_3^\perp)^\perp \\ &= (X_1^\perp X_2^\perp X_3^\perp)^\perp \end{aligned}$$

がわかる. 同様にして, 一般には

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = (X_1^\perp \cdots X_n^\perp)^\perp$$

となる.

X が左 coideal, Y が右 coideal のとき, $X^\perp$ は C^* の左 ideal, $Y^\perp$ は右 ideal となるから, $X^\perp Y^\perp$ は C^* の両側 ideal となる. よってこのとき,

$$X \wedge Y = (X^\perp Y^\perp)^\perp$$

は C の subcoalgebra である.

それから, $X, Y \subset C$ を subcoalgebras とすると, $X^\perp, Y^\perp \subset C^*$ は共に両側 ideal となるので,

$$X^\perp Y^\perp \subset X^\perp, Y^\perp$$

となる. この包含関係の双対をとると,

$$X \wedge Y = (X^{\perp} Y^{\perp})^{\perp} \supset X, Y$$

を得る. また, これにより

$$X \wedge Y \supset X + Y$$

となることがわかる.

1.3.2 canonical filtration の構成

wedge 積についての準備ができたところで, $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し,

$$C_{n-1} := \underbrace{\mathrm{cor}(C) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(C)}_{n}$$

とおく. 上でやったように, 各 C_{n-1} たちは C の subcoalgebra であり, また,

$$\mathrm{cor}(C) = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots$$

となっていることがわかる. これにより C が filtered coalgebra になることをこれから示したい.

命題 1.9 $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$.

[証明] 任意の $c \in C$ に対し, $c \in D \subset C$ なる有限次元 subcoalgebra D が存在することは前にやった. このとき $\mathrm{cor}(D)^{\perp}$ は D^* の巾零 ideal である. そこで,

$$(\mathrm{cor}(D)^{\perp})^n = \{0\}$$

となるような n をとる. すると, D の中での wedge 積で

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathrm{cor}(D) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(D)}_{n} &= (\underbrace{\mathrm{cor}(D)^{\perp} \cdots \mathrm{cor}(D)^{\perp}}_{n})^{\perp} \\ &= \{0\}^{\perp} \quad (\text{in } D) \\ &= D \ni c \end{aligned}$$

となって,

$$\begin{aligned} c \in D &= \mathrm{cor}(D) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(D) \quad (\text{in } D) \\ &\subset \mathrm{cor}(C) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(C) = C_{n-1} \quad (\text{in } C) \end{aligned}$$

となることがわかる. よって, $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ がいえた. □

後は, 次を示せば C が filtered coalgebra となることがわかる:

命題 1.10 $\Delta C_n \subset \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$ $(n \geq 0)$.

[証明] $n = 0$ のときは O.K. $0 < n$ のとき, $0 \leq j < n$ なる j に対し,

$$C_n = \underbrace{\mathrm{cor}(C) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(C)}_{j+1} \wedge \underbrace{\mathrm{cor}(C) \wedge \cdots \wedge \mathrm{cor}(C)}_{n-j} = C_j \wedge C_{n-j-1}$$

となるので,

$$\Delta C_n \subset C_j \otimes C + C \otimes C_{n-j-1}$$

となることがいえる. 上式は $j = -1, n$ のときも成立する (ただし, $C_{-1} = \{0\}$). 実際, C_n は C の subcoalgebra だから, とくに

$$\begin{aligned} \Delta C_n &\subset C \otimes C_n \\ \Delta C_n &\subset C_n \otimes C \end{aligned}$$

である. よって,

$$\Delta C_n \subset \bigcap_{j=-1}^{n} (C_j \otimes C + C \otimes C_{n-j-1})$$

となることがわかる. ここで, 実は, 次の小節での議論により

$$\bigcap_{j=-1}^{n} (C_j \otimes C + C \otimes C_{n-j-1}) = \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$$

となることがわかるので, これにより証明ができる. □(とりあえず)

1.3.3 filtered vector space に関する議論

(上の命題の証明中にやり残した部分は) Sweedler の本[2] に証明が載っていて[3], induction による証明なんですけど, (それより) もうちょっと良い証明がある, という風に気がついたので…(略)…. 少し一般的な状況に置き換えてその話をやってみます.

ベクトル空間 V に対して, subspace の列 $V_0, V_1, \cdots$ があって,

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

[2]おそらく, Moss E. Sweedler, "Hopf Algebras", W. A. Benjamin, New York, Mathematics Lecture Note Series, 1969 のこと

[3]Lemma 9.1.5 を参照

となっているとき, V を filtered vector space という. このとき V に対して, graded vector space $\mathrm{gr}(V), \widetilde{\mathrm{gr}}(V), \widetilde{\mathrm{gr}}^{(1)}(V)$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}(V) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n/V_{n-1} \\
\widetilde{\mathrm{gr}}(V) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} V/V_{n-1} \\
\widetilde{\mathrm{gr}}^{(1)}(V) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} V/V_n
\end{aligned}$$

(ただし $V_{-1} = 0$) により定める. また, V, W を二つの filtered vector spaces とするとき

$$(V \otimes W)_n = \sum_{i=0}^{n} V_i \otimes W_{n-i} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \quad (V \otimes W)_{-1} = \{0\}$$

とおくと, これは $V \otimes W$ の filtration となる (つまりこれにより $V \otimes W$ を filtered vector space とみることができる). このとき,

$$\widetilde{\mathrm{gr}}(V \otimes W) \xrightarrow{\xi} \widetilde{\mathrm{gr}}(V) \otimes \widetilde{\mathrm{gr}}(W)$$

という, ある canonical な map を定義することができる. それはどう定義するのかというと, まず, 各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ について

$$\begin{array}{ccc}
V \otimes W & \xrightarrow{\eta_{n+1}} & \bigoplus_{j=-1}^{n} V/V_j \otimes W/W_{n-j-1} \\
v \otimes w & \mapsto & \sum_{j=-1}^{n} (v \mod V_j) \otimes (w \mod W_{n-j-1})
\end{array}$$

という写像があるが, $(V \otimes W)_n \subset \mathrm{Ker}\, \eta_{n+1}$ なので, これから

$$(V \otimes W)/(V \otimes W)_n \xrightarrow{\xi_{n+1}} \bigoplus_{j=-1}^{n} V/V_j \otimes W/W_{n-j-1}$$

が induce される. また $\xi_0 = \mathrm{id}_{V \otimes W}$ として, これらを組み合わせて ξ を定義すればよい.

ここで, $j = -1, \cdots, n$ に対し

$$(V \otimes W)_n = \sum_{k=0}^{n} V_k \otimes W_{n-k} \subset V_j \otimes W + V \otimes W_{n-j-1}$$

となることに注意. したがって

$$(V \otimes W)_n \subset \bigcap_{j=-1}^{n} (V_j \otimes W + V \otimes W_{n-j-1}) \subset \mathrm{Ker}\, \eta_{n+1}$$

である．さらに ξ が単射であることがいえれば, $\operatorname{Ker}\eta_{n+1} = (V\otimes W)_n$ だから,

$$(V\otimes W)_n = \bigcap_{j=-1}^{n} (V_j\otimes W + V\otimes W_{n-j-1})$$

となることがわかる．そうすると, 先程の命題の証明でやり残した部分がでてくる．以下, ξ が単射であることを示そう．

まず, 各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し,

$$0 \to V_n/V_{n-1} \to V/V_{n-1} \to V/V_n \to 0 \quad \text{(exact)}$$

より,

$$0 \to \operatorname{gr}(V) \to \widetilde{\operatorname{gr}}(V) \xrightarrow{\partial} \widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(V) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

を得る．また, ξ を $\operatorname{gr}(V\otimes W)$ に制限した

$$\operatorname{gr}(V\otimes W) \xrightarrow{\xi} \operatorname{gr}(V)\otimes\operatorname{gr}(W)$$

は, (逆写像がつくれて) 同型になることは簡単にわかる．以上より, 次の可換図式:

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Ker}\xi \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(\xi,\xi) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{gr}(V\otimes W) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \widetilde{\operatorname{gr}}(V\otimes W) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\xi"] & \widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(V\otimes W) \arrow[d, "(\xi,\xi)"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{gr}(V)\otimes\operatorname{gr}(W) \arrow[r] & \widetilde{\operatorname{gr}}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}(W) \arrow[r] & \begin{array}{c}\widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}(W)\\ +\,\widetilde{\operatorname{gr}}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(W)\end{array}
\end{tikzcd}$$

を得る; ただし, (ξ,ξ) は ξ から自然に induce される写像である[4]．ここで, $K = \operatorname{Ker}\xi$ とし, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し

$$K(n) = K\cap(V\otimes W)/(V\otimes W)_{n-1}$$

とおくと, $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(n)$ となる．また,

$$\operatorname{Ker}(\xi,\xi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(n+1) =: K^{(1)}$$

となることも容易にわかる．このとき $K \xrightarrow{\partial} K^{(1)}$ が単射になることを (diagram chasing で) 示そう: $x\in K$ について, $\partial(x) = 0$ であったとすると, x は $\operatorname{gr}(V\otimes W)$ からきて

[4] $\widetilde{\operatorname{gr}}(V\otimes W) \xrightarrow{\xi} \widetilde{\operatorname{gr}}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}(W) \to \widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}(W) + \widetilde{\operatorname{gr}}(V)\otimes\widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(W)$ が $\widetilde{\operatorname{gr}}^{(1)}(V\otimes W)$ を経由している．

いることになるが, そこから下, 右と移していくと, $\xi(x) = 0$ にいくので, 結局 $x = 0$ がいえる. よって $K \xrightarrow{\partial} K^{(1)}$ は単射である.

さて, 任意の $x \in K(n)$ をとり, $x \in (V \otimes W)_m/(V \otimes W)_{n-1}$ となるような十分大きな m をとる. すると,

$$\begin{array}{ccccccc} K(n) & \xrightarrow{\text{単射}} & K(n+1) & \xrightarrow{\text{単射}} & \cdots & \xrightarrow{\text{単射}} & K(m+1) \subset (V \otimes W)/(V \otimes W)_m \\ x & \mapsto & \partial(x) & \mapsto & \cdots & \mapsto & 0 \end{array}$$

より, $x = 0$ となってしまう. これはつまり, $K = 0$ を意味している. よって, ξ が単射であることがいえた.