代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 5 月 27 日

1 ホップ加群

…これはもともと, ガロアの理論を拡張するときにでてきた概念なんですけども, 今回の講義の目的は pointed Hopf 代数なので, ガロアの理論はあまり必要ない. けれど, ホップ加群というのも (言葉として) でてくるので, ざっとやっていきたい.

1.1 ホップ加群とは?

H を Hopf algebra, $S : H \to H$ をその antipode とする. そして M を, 右 H module で, かつ右 H comodule でもあるものとする.

右 H comodule とは, ある線形写像 $\rho : M \to M \otimes H$ があって, sigma 記法で

$$\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 \quad (m \in M)$$

と書いたとき,

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum \rho(m_0) \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes \Delta m_1 \, (= \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2) \\ &m = \textstyle\sum m_0 \varepsilon(m_1) \end{aligned}$$

となるものであった.

ここで, さらに M が

$$\rho(mh) = \sum m_0 h_1 \otimes m_1 h_2 \quad ({}^\forall m \in M, {}^\forall h \in H)$$

をみたすとき, すなわち次が可換:

$$\begin{tikzcd} M \otimes H \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\rho\otimes\Delta"] & M \arrow[r, "\rho"] & M \otimes H \\ M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{tw}\otimes\mathrm{id}"] & & M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\cdot\otimes m"'] \end{tikzcd}$$

($\cdot$ は, 右 module としての H の作用)

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

であるとき, M を Hopf module (ホップ加群) という.

ホップ加群の定義そのものは, 別に H が bialgebra であってもいいわけですが, 特に antipode があるとですね, 構造が非常に単純になってしまう. これをそれからいいます.

まず, M を Hopf module とするとき, $M^{\mathrm{co}H}$ を, comodule としての不変元の全体, すなわち

$$M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$$

とする. このとき次が成り立つ:

定理 1.1 (Hopf module の構造定理) M が H 上の Hopf module であるとき,

$$\begin{array}{rcl} \alpha : M^{\mathrm{co}H} \otimes H & \xrightarrow{\sim} & M \\ m \otimes h & \mapsto & mh \end{array}$$

なる同型写像がある.

[証明] α の逆写像 β を構成する. まず $m \in M$ に対し,

$$P(m) := \sum m_0 S(m_1)$$

とする. すると,

$$\sum \rho(m_0) \otimes \Delta S(m_1) = \sum m_0 \otimes m_1 \otimes S(m_3) \otimes S(m_2)$$

だから,

$$\begin{array}{rcl} \rho(P(m)) & = & \sum \rho(m_0 S(m_1)) \\ & = & \sum m_0 S(m_3) \otimes m_1 S(m_2) \\ & = & \sum m_0 S(m_2) \otimes \varepsilon(m_1) 1 \\ & = & \sum m_0 S(m_1) \otimes 1 \\ & = & P(m) \otimes 1 \end{array}$$

となって, $P(m) \in M^{\mathrm{co}H}$ ($^\forall m \in M$) がわかる. そこで, $\beta : M \to M^{\mathrm{co}H} \otimes H$ を

$$\beta(m) := \sum P(m_0) \otimes m_1$$

により定める. このとき

$$\begin{array}{rcl} \alpha \circ \beta(m) & = & \sum P(m_0) m_1 \\ & = & \sum m_0 S(m_1) m_2 \\ & = & \sum m_0 \varepsilon(m_1) \\ & = & m \end{array}$$

より $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ がわかる．一方 $m \in M^{\mathrm{co}H}$, $h \in H$ のとき $\rho(mh) = \sum mh_1 \otimes 1h_2$ だから,

$$\begin{aligned}
\beta \circ \alpha(m \otimes h) &= \sum P(mh_1) \otimes h_2 \\
&= \sum mh_1 S(h_2) \otimes h_3 \\
&= \sum m\varepsilon(h_1) \otimes h_2 \\
&= m \otimes h
\end{aligned}$$

となり, $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ もわかる．よって, α は β を逆写像とする同型写像である． □

まあ, 一応, Hopf 加群についてはこれだけです．予告をしとくと, 後々, いわゆる Radford-Majid の boson 化 — 物理の言葉ですけども — というやり方があって, そのときにこれを使うんですね. Schauenburg の同値というのを使ってやるんですけれども, そのときに Hopf 加群というのがでてくる．で, 実はそこででてくるのは Hopf 加群の中でも両加群 (Hopf bimodule) …, そういうものがでてくる．それについてはまた後で…, 二学期ごろの話になるので, そのときにまた詳しくお伝えします．まあ, さしあたっては, こういうことがいえる, ということを覚えておいてくれればいい.

2 measuring と smash 積

で, また新しい節に入って, measuring と smash 積……, 初心者の人にはなじみのない言葉がでてきますが…. … smash という言葉はどういう意味なのか, 最初わかんなかったんですけど, 何か, 「たたいて潰す」というような意味らしいですね.

2.1 measuring とは?

C を coalgebra, A, B を algebra とする．このとき $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(C, B))$ と $\mathrm{Hom}(C \otimes A, B)$ とは (線形代数の一般論として)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(C, B)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C \otimes A, B) \\
\rho &\mapsto [\psi : c \otimes a \mapsto \rho(a)(c)]
\end{aligned}$$

によって同型になっている．ここで, 前回やったように $\mathrm{Hom}(C, B)$ には積 $*$ によって algebra の構造が入るので, $\rho : A \to \mathrm{Hom}(C, B)$ が algebra map になる場合 (すなわち $\rho \in \mathrm{Alg}(A, \mathrm{Hom}(C, B))$ の場合) を考えることができる．このとき, ρ が algebra map である, ということを ψ の言葉で書き表すということを考えてみることにしよう.

$\rho : A \to \mathrm{Hom}(C, B)$ が algebra map である, ということは,

$$\rho(ab) = \rho(a) * \rho(b), \quad \rho(1) = u\varepsilon \quad ({}^\forall a, b \in A)$$

ということだが, これをさらに

$$\rho(ab)(c) = \sum \rho(a)(c_1)\rho(b)(c_2), \quad \rho(1)(c) = \varepsilon(c)1 \quad ({}^\forall a, b \in A, {}^\forall c \in C)$$

と書き換えると, これはそのまま ψ の言葉に置き換えることができる:

$$\psi(c \otimes ab) = \sum \psi(c_1 \otimes a)\psi(c_2 \otimes b), \quad \psi(c \otimes 1) = \varepsilon(c)1 \quad ({}^\forall a, b \in A, {}^\forall c \in C). \quad (2.1)$$

この式 (2.1) を満たす線形写像 $\psi : C \otimes A \to B$ を measuring という.

… (この分野の開祖みたいな人である) Sweedler がこれを "measuring" と言ったので (今でもそう呼ばれていますが) ……, でも良く考えてみると, measur というのは「測る」というような意味ですよね. だから「測る」というよりも, むしろ「作用」というべきか……, coalgebra C が algebra A に作用しているという感じで.

普通は $\psi(c \otimes a)$ を $c \cdot a$ と書いて, 作用のように扱うんですね. すると上の条件は,

$$\begin{aligned} c \cdot ab &= \sum (c_1 \cdot a)(c_2 \cdot b) \\ c \cdot 1 &= \varepsilon(c)1 \end{aligned}$$

積に関する作用は comultiplication で分解してかける…, それから, 単位元に作用させるときは ε を通して作用しますよ, と, この方が書きやすいわけです.

例 2.1 集合 S に関する coalgebra $C = kS$ ($\Delta s = s \otimes s$, $\varepsilon s = 1$ ($s \in S$)) を考える. A, B を algebra とするとき, measuring $C \otimes A \ni c \otimes a \mapsto c \cdot a \in B$ を考えると, 各 $s \in S$ に対し

$$\begin{aligned} s \cdot ab &= (s \cdot a)(s \cdot b) \\ s \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

となるような作用になる. だから, この場合は measuring を与える, ということと, 各 $s \in S$ に対して algebra map $s : A \to B$ を定める, ということが同じこととなる.

例 2.2 C を, 二つの基底 g, d をもつ k-vector space ($C = kg \oplus kd$) とする. このとき Δ, ε を, g, d に対し

$$\begin{aligned} &\Delta g = g \otimes g, \quad \varepsilon g = 1, \\ &\Delta d = g \otimes d + d \otimes g, \quad \varepsilon d = 0 \end{aligned}$$

となるように定めると, これにより C は coalgebra となる.

さて, $C \otimes A \to B$ を与える, ということはこの場合どうなるだろうか. まず, g に関しては上の例と同様, ある algebra map $g : A \to B$ を与える, ということになる. d に関しては,

$$\begin{aligned} d \cdot ab &= (g \cdot a)(d \cdot b) + (d \cdot a)(g \cdot b) \\ d \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

ということになるが, こういう $d : A \to B$ を g-derivation という. つまり, この場合 measuring を定める, ということと, ある algebra map $g : A \to B$ と g-derivation $d : A \to B$ を定める, ということが同じことになる.

例えば $A = B$ とし, $g : A \to A$ は id_A として定めるとする. そうしたら, $d : A \to A$ は derivation そのもの:

$$d(ab) = ad(b) + d(a)b \ (\Rightarrow d(1) = 0)$$

である.

例 2.3 C を, 4 月 15 日のノートの例 1.3 でやった $B_\infty = \bigoplus_{i=0}^{\infty} kd_i$ という coalgebra とする. Δ, ε は,

$$\begin{aligned} \Delta d_n &= \sum_{i=0}^{n} d_i \otimes d_{n-i} \\ \varepsilon d_n &= \delta_{0n} \end{aligned}$$

となるように定めたのであった. このとき $k[X]$ を一変数多項式環として, $C \otimes k[X] \to k[X]$ を次のように定めることにする:

$$d_n \cdot X^m := \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} X^{m-n}.$$

(ここで, $n > m$ のとき二項係数は

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

となるので, 上がちゃんと well-defined になっていることに注意.) この作用が measuring になることをみてみることにする.

まず, X^m, X^l について

$$d_n \cdot X^m X^l = \begin{pmatrix} m+l \\ n \end{pmatrix} X^{m+l-n}$$

となるが, 一方,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (d_i \cdot X^m)(d_{n-i} \cdot X^l) &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} X^{m-i} \begin{pmatrix} l \\ n-i \end{pmatrix} X^{l-n+i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ n-i \end{pmatrix} \right) X^{m+l-n} \\ &= \begin{pmatrix} m+l \\ n \end{pmatrix} X^{m+l-n} \end{aligned}$$

となるので, ちゃんと measuring の条件を満たしていることがわかる. ちなみに, 二項係数の公式:

$$\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ n-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+l \\ n \end{pmatrix}$$

を証明するには,

$$(1+x)^m(1+x)^l = (1+x)^{m+l}$$

の両辺の x^n の項を見比べればよい.

例 2.4 C を c, s を基底とする k-vector space ($C = kc \oplus ks$) とし, Δ, ε を

$$\begin{aligned} \Delta c &= c \otimes c - s \otimes s, \quad \varepsilon c = 1, \\ \Delta s &= s \otimes c + c \otimes s, \quad \varepsilon s = 0 \end{aligned}$$

となるように定めると, これにより C は coalgebra となる. 実は上の式は三角関数の加法定理を抽象化したようなものである (c が cos で s が sin).

今 $k \subset \mathbb{R}$ であったとし, $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数のなす環とする. このとき次のような自然な measuring $C \otimes k[X] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$ がある:

$$\begin{aligned} c \cdot X^n &= \cos(nx) \\ s \cdot X^n &= \sin(nx). \end{aligned}$$

これがちゃんと measuring になっていることは, まさに三角関数の加法定理からわかる. 例えば

$$\cos((m+n)x) = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx)$$

から

$$c \cdot X^m X^n = (c \cdot X^m)(c \cdot X^n) - (s \cdot X^m)(s \cdot X^n)$$

が出てくる. s についても,

$$\sin((m+n)x) = \sin(mx)\cos(nx) + \cos(mx)\sin(nx)$$

より

$$s \cdot X^m X^n = (s \cdot X^m)(c \cdot X^n) + (c \cdot X^m)(s \cdot X^n)$$

がわかる.

2.2 H module algebra

H を bialgebra, — (ここは Hopf algebra としてもいいんですが) 今度は antipode は大した役割をはたさないので, 単に bialgebra とします —, A を algebra とし, H が A から A へ measur している

$$\begin{array}{rcl} H \otimes A & \to & A \\ h \otimes a & \mapsto & h \cdot a \end{array} \quad : \text{measuring}$$

とする. ここで, この measuring が左 module の作用にもなっている, という場合を考える. すなわち, $a, b \in A$, $g, h \in H$ に対し,

- measuring の条件: (☆☆) $\begin{cases} h \cdot ab = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \\ h \cdot 1 = \varepsilon(h) 1 \end{cases}$,
- 左 module の条件: (☆) $\begin{cases} (gh) \cdot a = g \cdot (h \cdot a) \\ 1 \cdot a = a \end{cases}$

という四つの条件を満たす線形作用があるとする. このとき, A を (左) H module algebra (つまり, H module でもある algebra, ということ) と呼ぶ.

で, まあ, こういう概念も pointed な Hopf 代数を考える上では必要になります. まず, 簡単な例としては,

例 2.5 G を monoid, $H = kG$ とする. このとき, H の algebra A への (☆), (☆☆) を満たす線形作用を決めることと, 各 $g \in G$ に対して algebra map $g : A \to A$ を, $g, h \in G$ に対して $gh : A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{h} A$, かつ $[1 : A \to A] = \mathrm{id}_A$ となるように定めることとが同じことになる. すなわち, monoid の map:

$$G \to \mathrm{Alg}(A, A)$$

を与えることと同じである. (ここでは $\mathrm{Alg}(A, A)$ の積は写像の合成.)

例 2.6 L を Lie algebra, $U(L)$ をその普遍包絡環とする. また, A を algebra とし, A 上の derivation 全体 $\mathrm{Der}(A)$ を

$$\mathrm{Der}(A) := \left\{ d \in \mathrm{End}(A) \mid d(ab) = ad(b) + d(a)b \quad ({}^\forall a, b \in A) \right\}$$

により定める. ここで, $\mathrm{Der}(A)$ の非常に大事な性質として,

$$d, e \in \mathrm{Der}(A) \Rightarrow [d, e] = de - ed \text{ も derivation}$$

が成り立つ, ということが知られている (証明は容易). これにより $\mathrm{Der}(A)$ は Lie algebra になることがわかる.

今, L から $\mathrm{Der}(A)$ への Lie algebra map $\alpha : L \to \mathrm{Der}(A)$ があったとする. すると $\mathrm{Der}(A) \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$ だから, $U(L)$ の普遍性より,

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Der}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(L) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathrm{End}(A) \end{array}$$

が可換となる algebra map $\bar{\alpha}$ がある. このとき, $\bar{\alpha}$ により A は $U(L)$ module algebra になる. このことを確かめてみよう. まず, $\bar{\alpha}$ が algebra map であることにより (☆) は O.K. (☆☆) は, まず $\Delta 1 = 1 \otimes 1$ で,

$$1 \cdot ab = \bar{\alpha}(1)(ab) = ab = (1 \cdot a)(1 \cdot b)$$

となり, また, $h \in L$ とすると $\Delta h = 1 \otimes h + h \otimes 1$ で,

$$h \cdot ab = \alpha(h)(ab) = a\alpha(h)(b) + \alpha(h)(a)b = a(h \cdot b) + (h \cdot a)b$$

となるから,

$$B = \left\{ h \in U(L) \mid h \cdot ab = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \right\} \supset L, \{1\}$$

となることがわかる. また, B は加法, スカラー倍について閉じていることはすぐにわかるし, $x, y \in B$ に対し, $\Delta(xy) = \sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$ で,

$$\begin{aligned} xy \cdot ab &= x \cdot (\sum (y_1 \cdot a)(y_2 \cdot b)) \\ &= \sum (x_1 \cdot (y_1 \cdot a))(x_2 \cdot (y_2 \cdot b)) \\ &= \sum (x_1 y_1 \cdot a)(x_2 y_2 \cdot b) \end{aligned}$$

となるから $xy \in B$ もわかり, B が $U(L)$ の部分代数であることがわかる. しかし $B \supset L$ だから, $B = U(L)$ となる. それから, $h \in L$ に対し, $\varepsilon(h) = 0$ だから $h \cdot 1 = \alpha(h)(1) = 0 = \varepsilon(h)1$ となって, ε が algebra map であることから, 任意の $h \in U(L)$ に対し $h \cdot 1 = \varepsilon(h)1$ となることがいえる.

例 2.7 $C = B_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} k d_i$ とする. …こういうのを divided powers というんですが…. これは実は bialgebra の構造を持つ. 実際, 積を

$$d_i d_j = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} d_{i+j}$$

によって定義すると,

$$\begin{aligned} d_i(d_j d_l) &= \begin{pmatrix} j+l \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+j+l \\ i \end{pmatrix} d_{i+j+l} \\ &= \frac{(j+l)!}{j!l!} \cdot \frac{(i+j+l)!}{i!(j+l)!} d_{i+j+l} \\ &= \frac{(i+j+l)!}{i!j!l!} d_{i+j+l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_i d_j) d_l &= \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+j+l \\ i+j \end{pmatrix} d_{i+j+l} \\ &= \frac{(i+j)!}{i!j!} \cdot \frac{(i+j+l)!}{(i+j)!l!} d_{i+j+l} \\ &= \frac{(i+j+l)!}{i!j!l!} d_{i+j+l} \end{aligned}$$

等々となって, 結合律が成立することがいえて, しかも d_0 が単位元になるので, C が algebra にもなることがわかる. また, ε は明らかに algebra map となる. Δ については,

$$\begin{aligned} \Delta d_i \Delta d_j &= (\sum_{\alpha=0}^{i} d_\alpha \otimes d_{i-\alpha})(\sum_{\beta=0}^{j} d_\beta \otimes d_{j-\beta}) \\ &= \sum_{\substack{0 \le \alpha \le i \\ 0 \le \beta \le j}} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+j-\alpha-\beta \\ i-\alpha \end{pmatrix} d_{\alpha+\beta} \otimes d_{i+j-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

で, 各 $l = 0, 1, \cdots, i+j$ について $(1+x)^l (1+x)^{i+j-l} = (1+x)^{i+j}$ の両辺の x^i の項を見比べると

$$\sum_{\alpha=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+j-l \\ i-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}$$

がわかるので,

$$\Delta d_i \Delta d_j = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{i+j} d_l \otimes d_{i+j-l} = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \Delta d_{i+j}$$

となって, Δ も algebra map であることがいえる.

さて, $k[X]$ への C の作用を

$$d_n X^m = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} X^{m-n}$$

によって定めると, これが measuring になることは先程やったし,

$$
\begin{aligned}
(d_i d_j)X^n &= \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} d_{i+j} X^n = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ i+j \end{pmatrix} X^{n-i-j} \\
&= \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} X^{n-i-j}, \\
d_i(d_j X^n) &= d_i \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} X^{n-j} = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-j \\ i \end{pmatrix} X^{n-i-j} \\
&= \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} X^{n-i-j}, \\
d_0 X^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} X^n = X^n
\end{aligned}
$$

より左 module としての作用にもなっていることがわかる. よって, $k[X]$ は上記の作用により C module algebra になる.

2.3 smash 積

H を bialgebra, A を H module algebra とする. このとき $A \otimes H$ に積を

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \sum a(g_1 \cdot b) \otimes g_2 h \quad (a, b \in A,\ g, h \in H)$$

により定める. するとこれは結合律を満たす:

$$
\begin{aligned}
& ((a \otimes g)(b \otimes h))(c \otimes l) \\
= & \sum (a(g_1 \cdot b) \otimes g_2 h)(c \otimes l) \\
= & \sum a(g_1 \cdot b)(g_2 h_1 \cdot c) \otimes g_3 h_2 l \\
= & \sum a(g_1 \cdot (b(h_1 \cdot c))) \otimes g_2 h_2 l, \\
& (a \otimes g)((b \otimes h)(c \otimes l)) \\
= & \sum (a \otimes g)(b(h_1 \cdot c) \otimes h_2 l) \\
= & \sum a(g_1 \cdot (b(h_1 \cdot c))) \otimes g_2 h_2 l.
\end{aligned}
$$

また, $1 \otimes 1$ が単位元となる. よって, この積により $A \otimes H$ に algebra の構造が入る. このようにして $A \otimes H$ を algebra とみたものを $A \# H$ と書き, これを smash 積と呼ぶ. ($A \# H$ の元 $a \otimes h$ も $a \# h$ と書いたりする.)

これは, ある意味で, 半直積の一般化になっている:

例 2.8 G を monoid とし, $H = kG$ とする. A を H module algebra とし, smash 積 $A \# H$ を考える. このとき, 積はどうなっているかというと,

$$(a \# g)(b \# h) = a(g \cdot b) \# gh \quad (a, b \in A,\ g, h \in H)$$

である.

特に, G, N を群として, G が N に, 群の自己同型として作用しているとする. このとき半直積 $N \rtimes G$ の積は, 丁度

$$(n, g)(n', g') = (n(g \cdot n'), gg') \quad (n, n' \in N,\ g, g' \in G)$$

となって, smash 積と同じ形をしている. これを Hopf algebra まで拡張すれば上記の smash 積と一致する.

半直積のさらなる一般化としては「接合積」というものがある. 今日はそこまでは話ませんけども, 半直積 → smash 積 → 接合積, という感じで一般化されています.

smash 積の基本的な性質としては, 次のようなものがあります:

命題 2.9 A には $A \# H$ が

$$(a \# h)b = a(h \cdot b)$$

によって作用し, これにより A は左 $A \# H$ module となる.

[証明] $(a \# g)(b \# h) = \sum a(g_1 \cdot b) \# g_2 h$ だから,

$$\begin{aligned} ((a \# g)(b \# h))c &= \sum a(g_1 \cdot b)(g_2 h \cdot c), \\ (a \# g)((b \# h)c) &= a(g \cdot (b(h \cdot c))) \\ &= \sum a(g_1 \cdot b)(g_2 h \cdot c) \end{aligned}$$

となって, 上がちゃんと作用になっていることがわかる. 線形性は明らか. □