代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 6 月 24 日

1 coradical filtration (その 2)

1.1 coalgebra filtration の性質, coradical filtration との関係

C を coalgebra とする. C の subspace の列 $\{C_n\}$ が C の (coalgebra) filtration であるとは, それにより C が filtered coalgebra になるということで, 具体的には,

$$\left.\begin{array}{l} C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \\ C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots, \\ \Delta C_n \subset \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i} \quad (\text{ただし}, C_{-1} = \{0\}) \end{array}\right\} \quad (*)$$

を満たすことをいう. (また, 逆に, $(*)$ を満たす coalgebra の族 $\{C_n\}$ があれば, $C = \bigcup_n C_n$ が filtered coalgebra になるわけだから, 「$(*)$ を満たす coalgebra の族 $\{C_n\}$」を一般に (coalgebra) filtration と呼ぶことにしても差し支えはない.)

また復習として, C の filtration を一つ fix すれば, それに対する graded coalgebra:

$$\mathrm{gr}(C) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n/C_{n-1}$$

を定義することができることも思い出しておこう.

まず最初に, coradical filtration との関係として,

$$\mathrm{cor}(C) \subset C_0$$

となることを示したい. これがわかると何かいいことがあるのかというと,

例 1.1 例えば, Lie 環 L の普遍包絡環 $U(L)$ を考える. $U(L)$ には階数によって, 自然に filtration $\{U(L)_n\}$ が入っている. このとき

$$U(L)_0 = k$$

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

だから, 上のことが証明できれば,

$$\mathrm{cor}(U(L)) = k$$

であることが一瞬でわかってしまう.

命題 1.2 $\{C_n\}$ を C の任意の filtration とするとき,

$$\mathrm{cor}(C) \subset C_0.$$

[証明] $C \supset S$ を任意の単純 subcoalgebra とする. また, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を,

$$S \subset C_n$$

となるような最小の非負整数とする. このとき $n = 0$ となることがいえれば証明ができる. そこで, $n > 0$ と仮定して矛盾を導く.

仮定より, $S \not\subset C_{n-1}$ で, S は単純だから,

$$S \cap C_{n-1} = \{0\}$$

である. したがって, (いつもやっている論法で,) ある $f \in C_n^*$ で, $f|_S = \varepsilon$, $f|_{C_{n-1}} = 0$ となるものが存在する. ここで, 任意の $c \in S$ に対し,

$$f \rightharpoonup c = \sum c_1 \langle f, c_2 \rangle = \sum c_1 \varepsilon(c_2) = c$$

となる. 一方, $c \in C_n$ でもあるから,

$$\Delta c \in C_0 \otimes C_n + \underbrace{C_1 \otimes C_{n-1} + \cdots + C_n \otimes C_0}_{\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} 0}$$

となって,

$$c = f \rightharpoonup c \in C_0$$

であることがわかる. 今, c は S の任意の元としてとったのだから, 以上より

$$S \subset C_0$$

となることになってしまうが, これは矛盾である. □

以下, C の filtration $\{C_n\}$ について,

$$\wedge^{n+1} C_0 = \underbrace{C_0 \wedge \cdots \wedge C_0}_{n+1}$$

などと書くことにする. 特に, coradical filtration は,

$$C_0 = \mathrm{cor}(C), \quad C_n = \wedge^{n+1} C_0$$

によって与えられるものであった. (このとりかたは, 次の意味で, 最小の filtration のとりかたといえる:)

命題 1.3 任意の filtration $\{C_n\}$ について,

$$C_n \subset \wedge^{n+1} C_0.$$

[証明]

$$\Delta C_n \subset \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i} \subset C_j \otimes C + C \otimes C_{n-j-1} \quad (-1 \leq j \leq n)$$

となるから, wedge 積の定義により

$$C_n \subset C_j \wedge C_{n-j-1} \quad (-1 \leq j \leq n),$$

とくに,

$$C_n \subset C_0 \wedge C_{n-1}$$

となることがわかる. 従って, n に関する帰納法により, 上記の結果を得ることができる. 実際, $n = 1$ のときは,

$$C_1 \subset C_0 \wedge C_0$$

となるし, また, $n > 1$ のとき, $n - 1$ 以下については成立と仮定すると,

$$\begin{aligned} c \in C_n \quad &\Rightarrow \quad c \in C_0 \wedge C_{n-1} \\ &\Rightarrow \quad \Delta c \in C_0 \otimes C + C \otimes C_{n-1} \subset C_0 \otimes C + C \otimes \wedge^n C_0 \\ &\Rightarrow \quad c \in C_0 \wedge (\wedge^n C_0) = \wedge^{n+1} C_0 \end{aligned}$$

となって[1], n についても成立することがわかる. □

この命題を使うと, 例えば次のようなことがわかる:

補題 1.4 C, D を coalgebra, $f : C \to D$ を coalgebra map とし, C にある filtration $\{C_n\}$ が入っているとする. また, $\{D_n\}$ を D の coradical filtration とするとき, もし $f(C_0) \subset D_0$ ならば, $f(C_n) \subset D_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ である.

[証明] f が coalgebra map であることから, $\{f(C_n)\}$ が $f(C)$ の filtration になることはすぐにわかる. よって, 先程の命題, および仮定より,

$$f(C_n) \subset \wedge^{n+1} f(C_0) \subset \wedge^{n+1} D_0 = D_n$$

となる. □

[1] 一般に, $Y \subset Z \Rightarrow X \wedge Y \subset X \wedge Z$ となる.

補題 1.5 C, D, E を coalgebra とし, $f : C \otimes D \to E$ を coalgebra map とする. C, D にはそれぞれある filtration $\{C_n\}, \{D_n\}$ が入っているとし, また, $\{E_n\}$ を E の coradical filtration とする. このとき, もし $f(C_0 \otimes D_0) \subset E_0$ ならば, $f(C_m \otimes D_n) \subset E_{m+n}$ $(m, n = 0, 1, 2, \cdots)$ である.

[証明] $C \otimes D$ の subspace $(C \otimes D)_n$ を,

$$(C \otimes D)_n = \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes D_{n-i} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \quad (C \otimes D)_{-1} = \{0\}$$

により定める. すると, $\{(C \otimes D)_n\}$ は $C \otimes D$ の filtration となる. 実際,

$$\begin{aligned} \Delta(C \otimes D)_n = \sum_{i=0}^{n} \Delta(C_i \otimes D_{n-i}) \quad &\subset \quad \sum_{i+j+k+l=n} (C_i \otimes D_j) \otimes (C_k \otimes D_l) \\ &= \quad \sum_{i=0}^{n} (C \otimes D)_i \otimes (C \otimes D)_{n-i} \end{aligned}$$

となって, ちゃんと filtration の条件を満たしている. すると, 先程の補題により

$$f(C_m \otimes D_n) \subset f((C \otimes D)_{m+n}) \subset E_{m+n}$$

となることがわかる. □

…で, 何のためにこういう準備をしたかというとですね, 我々の, 講義の目的である, pointed Hopf algebra について……

H を pointed Hopf algebra, $\{H_n\}$ を H の coradical filtration とする. すなわち,

$$H_0 = \mathrm{cor}(H) = k\mathrm{G}(H), \quad H_n = \wedge^{n+1} H_0$$

である. ここで, multiplication

$$m : H \otimes H \to H$$

は coalgebra map で, しかも, $H_0 = k\mathrm{G}(H)$ は積で閉じているから,

$$m(H_0 \otimes H_0) = H_0 H_0 = H_0$$

となっていることがわかる. よって, 上の補題より,

$$m(H_i \otimes H_j) = H_i H_j \subset H_{i+j} \quad (i, j = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる. しかも,

$$1 \in H_0$$

なので, 従って, H は filtered algebra だ, ということになる. …まあ, これはいつでも成り立つということではなくて, H が pointed Hopf algebra だから, こうなっている, ということです. それから antipode

$$S : H \to H$$

を考えると, これは anti-coalgebra map になっている. これについても,

$$S(H_0) = H_0$$

だから,

$$S(H_n) \subset H_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となることがわかる.

[記者注] 一応, filtered algebra などのちゃんとした定義を書いておきます:

定義 1.6 (filtered algebra) algebra A が filtered algebra であるとは, ある subspace の列 $\{A_n\}$ があって,

- $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$,
- $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$,
- $1 \in A_0$,
- $A_i A_j \subset A_{i+j}$ for $i, j = 0, 1, 2, \cdots$

となっていることをいう. またこのとき $\{A_n\}$ を A の (algebra) filtration という.

定義 1.7 (filtered bialgebra, filtered Hopf algebra) (1) bialgebra H が filtered bialgebra であるとは, 同じ filtration によって filtered algebra かつ filtered coalgebra になっていることをいう.

(2) H, K を二つの filtered bialgebra とするとき, bialgebra map $f : H \to K$ が filtered bialgebra map であるとは,

$$f(H_n) \subset K_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となることをいう. (anti- についても同様.)

(3) filtered Hopf algebra とは, filtered bialgebra であって, かつ, antipode が filtered map となっているものをいう.

すなわち, 先程の考察で明らかになったのは, H が pointed Hopf algebra であれば, coradical filtration によって, 自動的に H は filtered Hopf algebra となる, ということである.

一般に, H を filtered Hopf algebra とするとき, graded coalgebra:

$$\mathrm{gr}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n/H_{n-1}$$

を考えると, これに algebra 構造, antipode を入れることもでき, それにより, $\mathrm{gr}(H)$ は graded Hopf algebra となる. 具体的にはどうするのかというと, algebra 構造は, 各 $i, j = 0, 1, 2, \cdots$ について,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \begin{array}{c} H_{i-1} \otimes H_j \\ + H_i \otimes H_{j-1} \end{array} \arrow[r] \arrow[d, "m"] & H_i \otimes H_j \arrow[r] \arrow[d, "m"] & H_i/H_{i-1} \otimes H_j/H_{j-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{i+j-1} \arrow[r] & H_{i+j} \arrow[r] & H_{i+j}/H_{i+j-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の $H_i \otimes H_j \xrightarrow{m} H_{i+j} \to H_{i+j}/H_{i+j-1}$ が $H_i/H_{i-1} \otimes H_j/H_{j-1}$ を経由しているので, それにより induce される

$$H_i/H_{i-1} \otimes H_j/H_{j-1} \xrightarrow{\bar{m}} H_{i+j}/H_{i+j-1}$$

を用いて $\mathrm{gr}(H)$ の積を定義すればよい. antipode も同様に, 各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ について,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "S"] & H_n \arrow[r] \arrow[d, "S"] & H_n/H_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{n-1} \arrow[r] & H_n \arrow[r] & H_n/H_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

より,

$$H_n/H_{n-1} \xrightarrow{\bar{S}} H_n/H_{n-1}$$

が induce されるので, それを用いて定義する.

それで, H を pointed Hopf algebra とすると, それの coradical filtration を考えることによって, ある $\mathrm{gr}(H)$ という graded Hopf algebra を考えることができる — 実は $\mathrm{gr}(H)$ も pointed という性質を保っている. それについては次の節で説明しますが —. で, Andruskiewitsch と Schneider は grade のついた, $\mathrm{gr}(H)$ の分類を行なって, それをリフトする, ということで, H の分類にもっていく, …まあ, こういうアイデアで, 低次元なんかの分類のプログラムをやっているわけです. これを彼らは lifting property といっているわけですね.

それで, 準備の最後になりますが,

2 coradically graded coalgebra

について. 昔, Sweedler はですね, 非常に特別な場合として strictly graded coalgebra というのを考えてますけれど, それを一般化したものになっています. pointed Hopf 代数を研究するためには, 少し一般化したものをやる必要がある, と.

定義 2.1 (graded coalgebra) coalgebra $\mathcal{C}$ が graded coalgebra であるとは, $\mathcal{C}$ の subspace たちの族 $\{C(n)\}$ があって,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C(n), \\
&\Delta C(n) \subset \bigoplus_{i=0}^{n} C(i) \otimes C(n-i) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \\
&\varepsilon|_{C(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}$$

となることをいう. filtered coalgebra の場合と違って, 各 $C(n)$ は subcoalgebra とは限らないことに注意 ($n = 0$ のとき以外は大抵 subcoalgebra にはならないことが多い).

さて, graded coalgebra $\mathcal{C}$ に対し,

$$\Delta : C(n) \to \bigoplus_{i=0}^{n} C(i) \otimes C(n-i)$$

を分解して $\Delta = (\Delta_{i,n-i})$ と書くことにする. すなわち,

$$\Delta_{i,n-i} : C(n) \to C(i) \otimes C(n-i)$$

である. ここで, $\Delta_{0,n}, \Delta_{n,0}$ は常に単射になることに注意. なぜなら, $c \in \mathcal{C}$ について, ($\mathcal{C}$ と $\mathcal{C} \otimes k, k \otimes \mathcal{C}$ を同一視すれば)

$$c = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta_{0,n} c) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta_{n,0} c)$$

より, $\Delta_{0,n} c = 0$ または $\Delta_{n,0} c = 0$ ならば $c = 0$ であるから.

[記者注] 6 月 17 日のノートの「sigma 記法もどき」で書くなら,

$$c = \sum \varepsilon(c_{01}) c_{n2} = \sum c_{n1} \varepsilon(c_{02})$$

ということになります. この記法は filtered coalgebra よりは graded coalgebra に使う方が合っているかも.

さて, $\Delta_{i,n-i}$ たちを iterate して,

$$\Delta_{i,j,n-i-j} : C(n) \xrightarrow{\Delta_{i,n-i}} C(i) \otimes C(n-i) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta_{j,n-i-j}} C(i) \otimes C(j) \otimes C(n-i-j)$$

を定める. (これは, coassociative law より

$$\Delta_{i,j,n-i-j} : C(n) \xrightarrow{\Delta_{i+j,n-i-j}} C(i+j) \otimes C(n-i-j) \xrightarrow{\Delta_{i,j}\otimes\mathrm{id}} C(i) \otimes C(j) \otimes C(n-i-j)$$

としても同じになる.) さらに, どんどん iterate すれば, $n = i_1 + \cdots + i_r$ なる $i_1, \cdots, i_r$ に対して

$$\Delta_{i_1,\cdots,i_r} : C(n) \to C(i_1) \otimes \cdots \otimes C(i_r)$$

という map を定義することができる.

一方,

$$\mathcal{C}_n = C(0) \oplus \cdots \oplus C(n)$$

とおくと,

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \cdots, \\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}, \\ \Delta\mathcal{C}_n \subset \sum_{i=0}^{n} \mathcal{C}_i \otimes \mathcal{C}_{n-i} \end{array}$$

となるから, これは $\mathcal{C}$ の coalgebra filtration になる. つまり, graded coalgebra があれば, それに対応する filtration がありますよ, というわけです. しかも, その filtration で $\mathrm{gr}(\mathcal{C})$ を作ると, $\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_{n-1} = C(n)$ ですから, もとの $\mathcal{C}$ と同じになる.

命題 2.2 TFAE[2]

(i) $\mathcal{C}_{n-1} = \underbrace{\mathcal{C}_0 \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}_0}_{n} = \wedge^n \mathcal{C}_0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

(ii) $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_0$.

(iii) $\Delta_{1,\cdots,1} : C(n) \to \underbrace{C(1) \otimes \cdots \otimes C(1)}_{n} = C(1)^{\otimes n}$ は単射 $(n = 2, 3, 4, \cdots)$.

(iv) $\Delta_{i,n-i} : C(n) \to C(i) \otimes C(n-i)$ は単射 $(n = 2, 3, 4, \cdots,\ 0 < i < n)$.

[証明] ((i) $\Rightarrow$ (ii)) 自明.

((ii) $\Rightarrow$ (iii)) (ii) はすなわち,

$$\mathcal{C}_1 = \mathrm{Ker}(\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$$

という意味である. したがって, これにより

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\Delta'} \mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$$

[2]The following are equivalent — 「次は同値」の意.

という単射が induce されることがわかる.

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 = \bigoplus_{n=2}^{\infty} C(n), \quad \mathcal{C}/\mathcal{C}_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} C(n)$$

であるから, Δ' を各 $C(n)$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ ごとにみていくと,

$$\Delta' = (\Delta_{i,n-i})_{i=1,\cdots,n-1} : C(n) \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} C(i) \otimes C(n-i)$$

となる. これが単射となるわけだが, 特に, $n = 2$ のときは,

$$\Delta' = \Delta_{1,1} : C(2) \to C(1) \otimes C(1)$$

だから, (iii) の $n = 2$ の場合はこれでいえた. $n \geq 3$ の場合は, 次の可換図式:

$$\begin{tikzcd}
C(n) \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr, "\Delta_{1,\cdots,1}"'] & \bigoplus_{i=1}^{n-1} C(i) \otimes C(n-i) \arrow[d, "\Delta_{1,\cdots,1} \otimes \Delta_{1,\cdots,1}"] \\
& \underbrace{C(1) \otimes \cdots \otimes C(1)}_{n}
\end{tikzcd}$$

を使えば, 帰納法により, 各 $\Delta_{1,\cdots,1}$ が単射になることがわかる.

((iii) $\Rightarrow$ (iv)) 上の可換図式の一つの成分として,

$$\begin{tikzcd}
C(n) \arrow[r, "\Delta_{i,n-i}"] \arrow[dr, "\Delta_{1,\cdots,1}"'] & C(i) \otimes C(n-i) \arrow[d, "\Delta_{1,\cdots,1} \otimes \Delta_{1,\cdots,1}"] \\
& \underbrace{C(1) \otimes \cdots \otimes C(1)}_{n}
\end{tikzcd}$$

となるが, $\Delta_{1,\cdots,1}$ が単射だから, $\Delta_{i,n-i}$ も単射である.

((iv) $\Rightarrow$ (i)) まず, 明らかに

$$\mathcal{C}_{n-1} \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{C} \to \underbrace{\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}_0}_{n}) = \wedge^n \mathcal{C}_0$$

だから,

$$\mathcal{C}_{n-1} = \wedge^n \mathcal{C}_0$$

ということと,

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}_{n-1} \xrightarrow{\Delta \text{ の繰り返し}} \underbrace{\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}_0}_{n}$$

が単射だ, ということは同値である. さて,

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}_{n-1} = \bigoplus_{m=n}^{\infty} C(m)$$

で, (iv) より, 各 $C(m)$ において,

$$C(m) \xrightarrow{\Delta_{i_1,\cdots,i_n}} C(i_1) \otimes \cdots \otimes C(i_n) \quad (m = i_1 + \cdots + i_n, \quad i_1, \cdots, i_n > 0)$$

はすべて単射である. 従って, 先程の

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}_{n-1} \to \underbrace{\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}/\mathcal{C}_0}_{n}$$

が単射であることがわかる. □

今度は, filtered coalgebra との関係をみていこう, ということで, filtered coalgebra

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

をとり, それに対する graded coalgebra

$$\mathcal{C} = \mathrm{gr}(C) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} C_i/C_{i-1}$$

を考える. このとき C の filtration と $\mathcal{C}$ の filtration との間には次のような関係がある:

定理 2.3 TFAE
(1) $C_{n-1} = \wedge^n C_0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.
(2) $\mathcal{C}$ が, 前命題の (i)–(iv) のどれかをみたす.

[証明] ((1) ⇒ (2)) 先程と同様,

$$C_{n-1} = \wedge^n C_0$$

ということと,

$$C/C_{n-1} \xrightarrow{\Delta \text{ の繰り返し}} \underbrace{C/C_0 \otimes \cdots \otimes C/C_0}_{n}$$

が単射であるということは同値である．これを $C(n) = C_n/C_{n-1}$ のところに制限してみると, (1) から,

$$C(n) = C_n/C_{n-1} \xrightarrow{\Delta_{1,\cdots,1}} \underbrace{C_1/C_0 \otimes \cdots \otimes C_1/C_0}_{n} = \underbrace{C(1) \otimes \cdots \otimes C(1)}_{n}$$

が単射である, ということがいえる．これは前命題の (iii) に他ならない．

((2) $\Rightarrow$ (1)) $n = 1$ のときは明らか．$n = 2, 3, 4, \cdots$ のときを示すため, まず, 次の補題を示す:

補題 2.4 C を coalgebra, $C \supset D$ を subcoalgebra とする．C での wedge 積を $\wedge_C$, D での wedge 積を $\wedge_D$ などと書くことにすると, C の subspace X, Y について,

$$(D \cap X) \wedge_D (D \cap Y) = D \cap (X \wedge_C Y)$$

となる．特に, $X \wedge Y \subset D$ ならば,

$$X \wedge_C Y = X \wedge_D Y$$

と, 一致してしまう．

[証明] 次の可換図式:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow[\Delta]{} & D \otimes D & \longrightarrow & D/(D \cap X) \otimes D/(D \cap Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow[\Delta]{} & C \otimes C & \longrightarrow & C/X \otimes C/Y \end{array}$$

(縦射はすべて inclusion) の, 上の行の kernel が $(D \cap X) \wedge_D (D \cap Y)$ であり, 下の行の kernel が $X \wedge_C Y$ であるわけだから, ほとんど当り前である． □(補題 2.4)

定理 2.3 の証明に戻る．(2) を仮定すると, 特に (iii) が成立するから,

$$C_{n-1} = \mathrm{Ker}(C_n \to \underbrace{C_1/C_0 \otimes \cdots \otimes C_1/C_0}_{n}) = \wedge^n_{C_n} C_0 \quad (n = 2, 3, 4 \cdots)$$

となることはわかる．すると, $n < m$ のとき,

$$\wedge^n_{C_m} C_0 \subset \wedge^m_{C_m} C_0 = C_{m-1}$$

となることがいえるから, 上の補題により,

$$\wedge^n_{C_m} C_0 = \wedge^n_{C_{m-1}} C_0$$

となる．これを繰り返していくと，

$$\wedge^n_{C_m} C_0 = \wedge^n_{C_{m-1}} C_0 = \cdots = \wedge^n_{C_n} C_0 = C_{n-1}$$

がわかる．よって，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，

$$\wedge^n C_0 = \bigcup_{m=n}^{\infty} (\wedge^n_{C_m} C_0) = C_{n-1}$$

である． □(定理 2.3)

この定理から，直ちに次が分かる:

定理 2.5 TFAE
(1) $\{C_n\}$ が C の coradical filtration である．
(2) $\{\mathcal{C}_n\}$ が $\mathcal{C} = \mathrm{gr}(C)$ の coradical filtration である．
このとき，$\mathcal{C}$ を coradically graded coalgebra と呼ぶ．

[証明] $C_0 = \mathrm{cor}(C)$ のときに $\mathcal{C}_0 = \mathrm{cor}(\mathcal{C})$ となることを示せば，後は上の定理より従う．まず，$C_0 = \mathcal{C}_0$ であることに注意すると，$C_0 = \mathrm{cor}(C)$ のとき，

$$\mathrm{cor}(C) = C_0 = \mathcal{C}_0 \supset \mathrm{cor}(\mathcal{C})$$

となる．一方，C の任意の単純 subcoalgebra は $\mathcal{C}_0$ の単純 subcoalgebra，したがって，$\mathcal{C}$ の単純 subcoalgebra でもあることになるから，$\mathrm{cor}(\mathcal{C})$ に入っていることになる．よって，結局

$$\mathrm{cor}(C) = C_0 = \mathcal{C}_0 = \mathrm{cor}(\mathcal{C})$$

である． □

だから，言葉でいえば，$C = \bigcup_n C_n$ が coradically filtrated であることと，$\mathrm{gr}(C)$ が coradically graded であることが同値である，ということがいえたわけです．Andruskiewitsch と Schneider は，このことをかなり有効に使っている．それから，Sweedler の本にでているのは，これの特別な場合で，$C_0 = k = \mathcal{C}_0$ の場合に strictly graded といっている．

で，一応これだけ Hopf algebra の一般論についての準備ができたので，二学期からは，より Andruskiewitsch と Schneider の理論に則して説明をやっていきます．大体，シラバスに則して，二学期は，まず組紐カテゴリーの中での Hopf 代数とか，そういうのの説明……，で，まあ，Nichols 代数とかいろいろそういうのがでてきます．