# 代数学 I (Hopf 代数と量子群の入門)

竹内光弘先生 述, 天野勝利 記*

2002 年 6 月 10 日

## 1 単純 coalgebra と既約 coalgebra (その 2)

### 1.1 coalgebra map による既約 coalgebra の像, 既約 coalgebra 同士のテンソル積

この小節では, 次のような問題を考えてみることにする:

(A) $C$ を既約 coalgebra, $f : C \to E$ $(f \neq 0)$ を coalgebra map とするとき, coalgebra $f(C)$ は, いつ既約になるか?

(B) $C, D$ が既約 coalgebra のとき, coalgebra $C \otimes D$ は, いつ既約になるか?

以下, $C, D$ を既約 coalgebra, $f : C \to E$ $(f \neq 0)$ を coalgebra map とし, $C \supset R$, $D \supset S$ をそれぞれに含まれる (唯一の) 単純 subcoalgebra たちとする.

**補題 1.1** (A) $f(C) \supset T$ が $f(C)$ の単純 subcoalgebra のとき, $T \subset f(R)$ となる.
(B) $C \otimes D \supset T$ が $C \otimes D$ の単純 subcoalgebra のとき, $T \subset R \otimes S$ となる.

[証明] (A) 前回のノートの命題 1.1 より, $C$ は, 有限次元 subcoalgebra の族の和集合として書くことができる:

$$C = \bigcup_{\alpha} C_\alpha \quad (\text{各 } C_\alpha \text{ は有限次元 subcoalgebra}).$$

このとき $T \subset \bigcup_\alpha f(C_\alpha)$ で, $T$ は単純 subcoalgebra だから, ある $\alpha$ があって, $T \subset f(C_\alpha)$ となる. $C_\alpha$ はやはり既約 coalgebra で $C_\alpha \supset R$ となるから, その dual algebra $C_\alpha^*$ は

*文中の間違い, 誤植などの責任は天野にあります.

$R^\perp$ を唯一の極大 ideal とする local algebra である．このとき $R^\perp$ は巾零になることに注意しておこう．ここで, 全射 coalgebra map $C_\alpha \xrightarrow{f} f(C_\alpha)$ の双対写像:

$$\begin{array}{ccc} C_\alpha^* & \xleftarrow{f^*} & f(C_\alpha)^* \\ \cup & & \cup \\ R^\perp & & f(R)^\perp \end{array}$$

を考えると, これは単射になる．さらにこれの $f(R)^\perp$ への制限を考えると,

$$\begin{aligned} x \in f(R)^\perp \quad &\Rightarrow \quad \{0\} = \langle x, f(R)\rangle = \langle f^*(x), R\rangle \\ &\Rightarrow \quad f^*(x) \in R^\perp \end{aligned}$$

だから, これにより $f(R)^\perp \hookrightarrow R^\perp$ となっていることがわかる．特に $f(R)^\perp$ は巾零である．

さて, 今, 矛盾を導くために $T \not\subset f(R)$ であったと仮定しよう．このとき, $T$ が単純であることにより, $T \cap f(R) = \{0\}$ となるはずである．すると $x \in f(C_\alpha)^*$ で, $x|_T = \varepsilon$, $x|_{f(R)} = 0$ ($\Rightarrow x \in f(R)^\perp$) となるものが存在する．$f(R)^\perp$ は巾零だから, ある $n \in \mathbb{N}$ があって $x^n = 0$ とならねばならないが, 一方で $x^n|_T = \varepsilon^n = \varepsilon \neq 0$ となっているから, これは矛盾である．よって $T \subset f(R)$ となることがいえた．

(B) 先程と同様に, $C, D$ を有限次元 subcoalgebra たちの和集合として,

$$C = \bigcup_\alpha C_\alpha, \quad D = \bigcup_\beta D_\beta$$

と書くことにする．このとき $C \otimes D = \bigcup_{\alpha,\beta} C_\alpha \otimes D_\beta$ である．また, $T \subset C \otimes D$ で $T$ は単純だから, ある $\alpha, \beta$ があって $T \subset C_\alpha \otimes D_\beta$ となる．ここで, $(R \otimes S)^\perp$ が巾零になることがいえれば, (A) と同様の論法で $T \subset R \otimes S$ となることがいえる．そこで, 以下, $(R \otimes S)^\perp$ が巾零になることを示そう．

$C_\alpha, D_\beta$ は有限次元だから,

$$(C_\alpha \otimes D_\beta)^* \simeq C_\alpha^* \otimes D_\beta^*$$

となっている．このとき $(R \otimes S)^\perp$ は右辺の ideal として,

$$(R \otimes S)^\perp = \underbrace{R^\perp \otimes D_\beta^*}_{I \text{ とおく}} + \underbrace{C_\alpha^* \otimes S^\perp}_{J \text{ とおく}}$$

となっている[1]. ここで, $R^\perp, S^\perp$ は巾零だから, $I, J$ も巾零である. よって, ある $N, M \in \mathbb{N}$ があって $I^N = \{0\} = J^M$ となる. 一方,

$$IJ = R^\perp \otimes S^\perp = JI$$

より,

$$\begin{aligned}(I+J)^2 &= I^2 + IJ + JI + J^2 = I^2 + IJ + J^2 \\ &\vdots \\ (I+J)^n &= \sum_{i=0}^{n} I^i J^{n-i}\end{aligned}$$

となる. そこで $n \geq N + M - 1$ なる $n$ をとれば, $i = 0, \cdots, n$ に対し, 常に $n - i \geq M$ または $i \geq N$ となるから, $(I+J)^n = \{0\}$ となって, $I + J = (R \otimes S)^\perp$ も巾零であることがわかる. □

この補題を使うと, 次が分かる:

**命題 1.2** (A) $f(C)$ が既約 $\Leftrightarrow$ $f(R)$ が既約.
(B) $C \otimes D$ が既約 $\Leftrightarrow$ $R \otimes S$ が既約.

[証明] 上記の補題より, (A) $\mathcal{S}(f(C)) = \mathcal{S}(f(R))$, (B) $\mathcal{S}(C \otimes D) = \mathcal{S}(R \otimes S)$ が従う. □

さて, 特に, $C$ が pointed, すなわち $R = kg$ $(g \in \mathrm{G}(C))$ のとき, $f(R) = kf(g)$ (一次元) だから $f(R)$ は単純である. また, $R \otimes S$ は,

$$R \otimes S = kg \otimes S \simeq S$$

となるから, やはりこれも単純になる. よって, 次が成り立つ:

**系 1.3** (A) $C$ が pointed irreducible ならば, $f(C)$ も pointed irreducible.
(B) $C, D$ が irreducible で, しかもどちらか一方が pointed ならば, $C \otimes D$ も irreducible となる. さらに, $C, D$ 両方が共に pointed irreducible ならば $C \otimes D$ も pointed irreducible である.

[1] これは, $\sum_i x_i \otimes y_i \in C^*_\alpha \otimes D^*_\beta$ $(x_i \in C^*_\alpha,\ y_i \in D^*_\beta)$ に対し,

$$\langle \sum_i x_i \otimes y_i, R \otimes S \rangle = \sum_i \langle x_i, R \rangle \langle y_i, S \rangle = \{0\}$$

となるための必要十分条件を考えればわかる.

…だから, pointed というのは非常に扱いやすい, ということがこれでわかるわけです. pointed irreducible な coalgebra の, coalgebra map による像 — ということは, pointed irreducible coalgebra の quotient coalgebra — は必ず pointed irreducible になる. で, subcoalgebra もそうなるし, テンソル積もそうなる. と, かなり性質が良くなる. そういうこともあって, pointed なものを考えたい, ということになるわけです.

上以外の場合では, 例えばどのようなときに $f(R)$ が既約になるのかというと…

**例 1.4** $R$ が cocommutative な単純 coalgebra であるとき, $R^*$ は $k$ の有限次拡大体となる. このとき $R^* \supset f(R)^* \supset k$ となって, $f(R)^*$ は cocommutative な $R^*$ の subalgebra, 言い替えれば $R^*/k$ の中間体となることがわかる. よって, この場合は $f(R)$ も単純 coalgebra となる.

だから, 系として …(A) の場合だけですが…,

**系 1.5** (A) $C$ が cocommutative irreducible であれば, $f(C)$ も既約である.

テンソル積の方は…, いわゆる分離拡大でないとうまくいかない.

# 2 pointed ホップ代数

今回の講義の目的は, pointed なホップ代数の分類なんですけども, この節で話すことは非常に elementary なことです. 量子代数が世に現われる前に議論されてたようなこと — まあ, 古典的なことをやりたい. 「古典的」という意味は, 何らかの意味で, 「可換性」が入っているということ. これも非常に大事なんですよね. 代数群とか…, Lie 環とか考える場合……. それ (古典的な理論) を一応知っている上で, それをさらにひねったものとして量子的なものが考えられている. だから, それの前段階といった感じです.

ここでも二つの場合を考えて,

(a) $H$ が bialgebra の場合.

(b) $H$ が, antipode $S$ をもつ Hopf algebra の場合.

の両方について平行して論じていく ((b) は (a) の特別な場合であることに注意). 以下, (a), (b) と書いたら, それぞれの場合で考えていることを意味しているものとする. また, どちらの場合も $G = \mathrm{G}(H)$ を $H$ の group-like 元全体とし, $g \in G$ に対し, $H^g \subset H$ を $kg$ の IC (すなわち $g$ の PIC) とする. さらに subcoalgebra $\widetilde{H}$ を,

$$\widetilde{H} = \bigoplus_{g \in G} H^g \subset H$$

により定める.

**補題 2.1** $g, h \in G$ に対し,

(a) $H^g H^h \subset H^{gh}$. 特に, $H^1$ は $H$ の subbialgebra である.

(b) $S(H^g) \subset H^{g^{-1}}$. 特に, $H^1$ は $H$ の Hopf subalgebra である.

[証明] (a) 系 1.3 より, $H^g \otimes H^h$ は pointed irreducible coalgebra となっている. また, $H$ は bialgebra だから, multiplication

$$H^g \otimes H^h \xrightarrow{m} H$$

は coalgebra map である. よって, 再び系 1.3 より

$$H^g H^h = m(H^g \otimes H^h)$$

も pointed irreducible coalgebra であることがわかる. 一方 $H^{gh}$ は $gh$ を含む irreducible coalgebra のうち最大のものだから,

$$H^g H^h \subset H^{gh}$$

となることがいえた. 特に,

$$H^1 H^1 \subset H^1, \quad 1 \in H^1$$

だから, $H^1$ は $H$ の subalgebra かつ subcoalgebra, 従って subbialgebra となる.

(b) まず, anti-coalgebra map $H^g \xrightarrow{S} H$ を coalgebra map とみなす, ということを考えてみたい. それには, oppsite coalgebra $H^{\mathrm{cop}}$ というものを使って, 今の map を

$$H^g \xrightarrow{S} H^{\mathrm{cop}}$$

とみればよい. ただし, $H^{\mathrm{cop}}$ とは, 余積を ($H$ の sigma 記法で) $\Delta c = \sum c_2 \otimes c_1$ によって定めた coalgebra である ($\varepsilon$ は $H$ と同じものをとる). そうすると $H^g \xrightarrow{S} H^{\mathrm{cop}}$ は coalgebra map で, $H^g$ は pointed irreducible だから, $S(H^g)$ ($\subset H^{\mathrm{cop}}$) も pointed irreducible な subcoalgebra である. ここで, ある coalgebra が「$H^{\mathrm{cop}}$ の subcoalgebra である」ということと「$H$ の subcoalgebra である」ということはまったく同値なので, $S(H^g)$ は, $H$ の, pointed irreducible な subcoalgebra でもある. すると, $S(g) = g^{-1}$ より $g^{-1} \in S(H^g)$ だから,

$$S(H^g) \subset H^{-g}$$

となることがいえる. また, (a) より $H^1$ は $H$ の subbialgebra で, しかも

$$S(H^1) \subset H^1$$

だから, $S(H^1)$ は $H$ の Hopf subalgebra となることがわかる. □

すると, 上の補題の系として次がわかる:

**系 2.2** (a) $\widetilde{H}$ は $H$ の subbialgebra である.

(b) $\widetilde{H}$ は $H$ の Hopf subalgebra である.

[証明] (a) 上の補題より,

$$\begin{aligned}\widetilde{H}\widetilde{H} &= (\sum_g H^g)(\sum_h H^h) \\ &= \sum_{g,h} H^g H^h \subset \sum_{g,h} H^{gh} \subset \widetilde{H}\end{aligned}$$

となって, $\widetilde{H}$ が積で閉じていることがいえて, さらに $1 \in H^1 \subset \widetilde{H}$ となるから, $\widetilde{H}$ は $H$ の subalgebra であることがわかる. 一方, $\widetilde{H}$ は subcoalgebra でもあるのだから, subbialgebra である.

(b) 上記に加えて,

$$S(\widetilde{H}) = \bigoplus_g S(H^g) \subset \bigoplus_g H^{g^{-1}} = \widetilde{H}$$

となるから, Hopf subalgebra になることがわかる. □

**注意 2.3** ここで注意しなければいけないのは, $\widetilde{H}$ と $H$ の違い, ということについてです. 両者がいつでも一致してくれるとありがたいんだけども, 実際は, 仮に $H$ が pointed だとしても $H = \widetilde{H}$ とは限らない. 量子群, あるいは量子代数なんかを扱って, そういう状況が非常に明らかになってきたわけです.

しかし, もし $H$ が cocommutative で, かつ pointed である, という場合ならば, 前回のノートの命題 1.21 でやったように, $H = \widetilde{H}$ となる. さらに $k$ が代数閉体のとき, $H$ が cocommutative でさえあれば (自動的に pointed にもなるので) $H = \widetilde{H}$ となる. これも非常に役にたつ……, 代数群の超代数 (hyperalgebra) というものがあるんですけれども — これは私 (竹内先生) が昔学位論文のときに研究したものですけれども — そういうものを考える場合は, こういう状況が非常に役にたつ. …まあ, 今は時代が変わって, それを量子化したものを考える…, この講義も量子のほうを中心におきますので, まあこれは, とくに後で使うというわけではない.

以下は, 簡単のために, (b) の状況, すなわち $H$ が Hopf 代数である場合だけを考えて, $\widetilde{H}$ の構造について述べます. まあ, antipode がない場合はちょっと収拾がつかない, ということですね.

$g, h \in G$ に対し,

$$H^g H^h \subset H^{gh}$$

だったから, とくに,

$$gH^h \subset H^{gh}$$
$$H^g h \subset H^{gh}$$

である. 従って,

$$gH^hg^{-1} \subset H^{gh}g^{-1} \subset H^{ghg^{-1}}$$

となることがいえる. ここで $h=1$ とすれば,

$$gH^1g^{-1} \subset H^1$$

がわかる. よって, 次のような線形作用を考えることができる:

$$\begin{array}{rcl} G \times H^1 & \to & H^1 \\ (g,x) & \mapsto & gxg^{-1}. \end{array}$$

言い替えると, 各 $g \in G$ に対し線形写像 $H^1 \xrightarrow{g(\quad)g^{-1}} H^1$ が定まる. これは Hopf algebra map である. 実際, これが algebra map だということは簡単にわかるし, $c \in H$ について

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{g(\quad)g^{-1}} & gcg^{-1} \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ \sum c_1 \otimes c_2 & \xrightarrow[(g(\quad)g^{-1})\otimes(g(\quad)g^{-1})]{} & \sum gc_1g^{-1} \otimes gc_2g^{-1} \end{array}$$

はちゃんと可換になっているので, coalgebra map でもある. 特に, この作用によって $H^1$ を $kG$ module algebra とみなすことができる ($g(ab)g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})$, $g1g^{-1} = 1$ だから, ちゃんと measuring になっている). そうするとさらに, smash 積 $H^1 \# kG$ を考えることができる. $H^1 \# kG$ の積は,

$$(x \# g)(y \# h) = x(gyg^{-1}) \# gh$$

により与えられ, 単位元は $1 \# 1$ である[2].

**定理 2.4** (i) $H^1 \# kG$ は, smash 積の algebra 構造と, $H^1 \otimes kG$ としての coalgebra 構造:

$$\begin{array}{l} \Delta(x \# g) = \sum (x_1 \# g) \otimes (x_2 \# g), \\ \varepsilon(x \# g) = \varepsilon(x) \end{array}$$

により Hopf algebra となる. antipode は

$$S(x \# g) = (1 \# g^{-1})(S(x) \# 1) = g^{-1}S(x)g \# g^{-1}$$

により定まるものである.

(ii)

$$\begin{array}{rcl} \phi : H^1 \# kG & \to & \widetilde{H} \\ x \# g & \mapsto & \phi(x \# g) = xg \end{array}$$

とおくと, $\phi$ は Hopf algebra の同型写像になる.

[2] 5 月 27 日のノートを参照

[証明] まともに (i) を直接証明することもできるが, 先に (ii) を考えた方が簡潔に証明できる. まず, すぐにわかることとして,

$$\begin{array}{ccc} H^1 & \to & H^g \\ x & \mapsto & xg \end{array}$$

は, coalgebra map として同型である ($y \mapsto yg^{-1}$ が逆写像); この同型は $H^1 \# kg \xrightarrow{\sim} H^g$ (as coalgebras) と書くこともできる. $\phi : H^1 \# kG \to \widetilde{H} = \bigoplus_{g \in G} H^g$ はそれを束ねたものだから, やはり coalgebra isomorphism となることがわかる. 一方,

$$\phi(x(gyg^{-1}) \# gh) = x(gyg^{-1})gh = (xg)(yh) = \phi(x \# g)\phi(y \# h)$$

だから, $\phi$ は algebra map でもあって, したがって $\phi$ は bialgebra としての同型である. そして $\widetilde{H}$ は Hopf algebra なのだから, $H^1 \# kG$ にも Hopf algebra の構造が入る. そのとき $\widetilde{H}$ の antipode からどうやって $H^1 \# kG$ の antipode が導かれるのかというと, それは $S\phi = \phi S$ となるように導かれるのである. すなわち,

$$\begin{array}{rcl} \phi S(x \# g) & = & S\phi(x \# g) \\ & = & S(xg) \\ & = & S(g)S(x) \quad (\leftarrow S \text{ は anti-algebra map}) \\ & = & g^{-1}S(x) \\ & = & g^{-1}S(x)gg^{-1} \\ & = & \phi(g^{-1}S(x)g \# g^{-1}) \end{array}$$

だから,

$$S(x \# g) = g^{-1}S(x)g \# g^{-1}$$

により定まる $S$ が $H^1 \# kG$ の antipode となることがわかる. 以上より (i) と (ii) がいえた. □

この定理と, 先程の注意を合わせると, 次を得る:

**系 2.5** $H$ が cocommutative pointed Hopf algebra ならば,

$$\begin{array}{rcl} H & = & H^1 \# k\mathrm{G}(H) \quad \text{as algebra} \\ & = & H^1 \otimes k\mathrm{G}(H) \quad \text{as coalgebra} \\ xg & \leftrightarrow & x \otimes g \end{array}$$

となる. 特に, $k$ が代数閉体のときは, $H$ が cocommutative でさえあれば, pointed が自動的に従い, 上が適用できる. …まあ, この状況が, 代数群の超代数ということになる. 実は超代数というのは Lie 環の拡張概念. Lie 環というのは, 体の標数が 0 のときは非常に役に立つんだけども, 正標数だとそれだけでは足りなくなるので, それを補ってですね, うまく cocommutative な Hopf 代数となるのが超代数.

最後に一つだけ注意として,

**注意 2.6** $H$ を bialgebra とする. もし $H$ が coalgebra として既約ならば, $H \supset H^1$ だから, $H$ に含まれる単純 subcoalgebra は, $H^1$ に含まれる単純 coalgebra $k1$ でしかありえない. 従って, $H$ はこのとき自動的に pointed irreducible となる.