10　行列の対角化とその応用 の解答例

演習 10.1 (1) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 のみで, 固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$($k$ は 0 でない定数) という形のものしか存在しない. よって, 2 つの線形独立な固有ベクトルをとることができないので, 対角化不可能である.

(3) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$\begin{aligned} P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

演習 10.2 (1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ とすると, $\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ なので, もし $\boldsymbol{y}$ が微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解ならば, $\lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t} = A\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ が成り立つ. これの両辺に $e^{-\lambda t}$ をかければ, $\lambda\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$ となって, λ が A の固有値, $\boldsymbol{v}$ が λ に対する固有ベクトルであることが分かる.

逆に, $\boldsymbol{v}$ が A の固有値 λ に対する固有ベクトルであったとすると, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから, この両辺に $e^{\lambda t}$ をかければ $A\boldsymbol{v}e^{\lambda t} = \lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ を得る. これは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ が微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解であることを意味する.

(2) $\boldsymbol{y} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-6t}$.

(3) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-6t}$. つまり, $\begin{cases} y_1(t) = 4e^{-t} + e^{-6t} \\ y_2(t) = 2e^{t} - 2e^{-6t}. \end{cases}$

注意. 今回は連立微分方程式の例でしたが, これは 2 階の微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

を解く場合にも使えるテクニックです.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

とおけば, もとの方程式を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ と書くことができて, もし A が対角化可能ならば, 今回の問題と同様にして解く事が可能になります. A が対角化可能でない場合は一般にはもう少し難しいのですが, 興味がある人は適当な微分方程式の教科書をあたってみてください.