9 固有値・固有ベクトル の解答例

演習 9.1 下記で, k, k_1, k_2 は, $k \neq 0$, $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ を満たす任意の定数.

(1) $-1,\ k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $4,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $0,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $3,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $1,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $4,\ k\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $6,\ k\begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$

(4) $0,\ k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $-1,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $3,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(5) $3,\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $-3,\ k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 9.2 (1) $\Phi_{{}^tA}(x) = |xE - {}^tA| = |{}^t(xE - A)| = |xE - A| = \Phi_A(x)$ となって, 両者の固有多項式が一致するので, その根である固有値も一致する.

(2) 固有値 r に対する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ とすると $A\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}$ だから, この両辺に左から A^{-1} をかけて,

$$\boldsymbol{v} = rA^{-1}\boldsymbol{v}$$

を得る. ここで, もし $r = 0$ とすると, 上の式より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となってしまい $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾するから, $r \neq 0$ である. また, さらに上の式の両辺に $1/r$ をかければ

$$(1/r)\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}$$

となるので, $1/r$ は A^{-1} の固有値であることがいえる.

演習 9.3 ((a) $\Rightarrow$ (b)) r を A の任意の固有値, $\boldsymbol{v}$ を r に対する A の固有ベクトルとする. $A\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}$ より, $A^2\boldsymbol{v} = rA\boldsymbol{v} = r^2\boldsymbol{v}$ で, これを繰り返せば,

$$A^n\boldsymbol{v} = r^n\boldsymbol{v}$$

を得る. しかし, $A^n = O$ だから, 結局 $r^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる. これと $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $r^n = 0$, よって, $r = 0$ を得る.

((b) $\Rightarrow$ (a)) A の固有値が 0 のみであるということは, A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ の根がすべて 0 であるということだから, ($\Phi_A(x)$ が最高次係数 1 の n 次多項式であることと因数定理より) $\Phi_A(x) = x^n$. よって, ハミルトン・ケーリーの定理により $A^n = O$.