8　外積/ファンデルモンドの行列式

演習 8.1 次の外積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

演習 8.2 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を空間ベクトルとするとき, 等式

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

が成り立つことを示せ. ここで, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ や $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ はベクトルの内積を表す.

[ヒント] 両辺とも座標系の取り方にはよらないので, 例えば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面[1]が xy 平面であったとしてよく, さらに $\boldsymbol{a}$ が x 軸に平行であったとしてもよい. つまり, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3$$

と表される場合についてのみ示せば十分.

演習 8.3 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を空間ベクトルとし, これらを列ベクトルとする 3 次の正方行列 $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ をとる.

(1) $|A| = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ を示せ.

(2) $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行 6 面体の体積に一致することを説明せよ.

[ヒント] (1) 行列式の余因子展開. (2) 外積の意味と内積の意味をふまえつつ, 図を描いて考えてみてください.

※ 時間が余った人は, 次も考えてみてください.

演習 8.4 xy 平面上に, x 座標がどの 2 つも互いに異なる n 個の点 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられているとする. このとき,

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

の形の曲線で, これら n 個の点すべてを通るものが唯一つだけ存在することを示せ.

[ヒント] ファンデルモンドの行列式を使う.

[1] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形従属のときはこの表現は正確ではありませんが