8　外積/ファンデルモンドの行列式 の解答例

演習 8.1 (1) $-3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$　(2) $5\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$　(3) $8\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

演習 8.2 (ヒントからの続き) $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3$ とすると, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$ より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= ab_2\boldsymbol{e}_3 \times (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3) = ab_2c_1\boldsymbol{e}_2 - ab_2c_2\boldsymbol{e}_1 \\ &= (ac_1)(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) - (b_1c_1 + b_2c_2)a\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

よって, 成立することがいえた. □

演習 8.3 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ とおく.

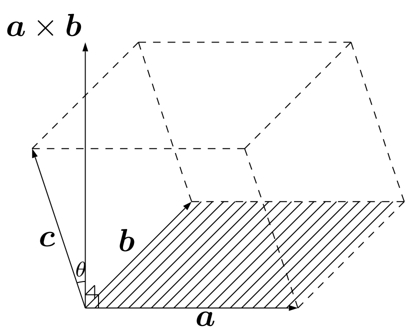
(1) $|A|$ を第 3 列目に関して余因子展開すれば,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} &= c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(2) 右図のように, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ とする. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形 (斜線部) を底面としたときの, 平行六面体の高さは

$$||\boldsymbol{c}|| \cdot |\cos\theta|$$

となる (θ が鋭角のときは $\cos\theta > 0$ だが, θ が鈍角のときは平行六面体は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の方向とは



逆側にあり, $\cos\theta < 0$ であるため絶対値をとる必要がある). また斜線部の平行四辺形の面積は $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ であるから, 平行六面体の体積は

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| \cdot ||\boldsymbol{c}|| \cdot |\cos\theta| = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$$

となることが分かる.

演習 8.4 曲線

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

が n 個の点 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ すべてを通るための必要十分条件は

$$\begin{cases} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} \end{cases}$$

であるが, これを書き直すと,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{X\text{ とおく}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる. すると, 上記で X とおいた行列の行列式 $|X|$ はファンデルモンドの行列式になる. 仮定より $x_1, \ldots, x_n$ はどの 2 つも互いに異なるので,

$$|X| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

よって X は正則行列である. そこで, 式 (2) の両辺に左から X^{-1} をかければ,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

を得る. よって, これにより $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ を定めたものが, (1) の形の曲線のうち $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ すべてを通る唯一つのものである. □