7　多項式と行列 の解答例

演習 7.1

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x-1 & 1 & x-1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(第 4 列に関して余因子展開)}$$

$$= \quad x(x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x(x-1)^3.$$

演習 7.2 $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$ なので,

(1) $f(x) = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = O.$

※ (2) はハミルトン・ケーリーの公式.

演習 7.3 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形従属 $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x^2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ 3.$$