6　行列式の性質 (その 2) の解答例

演習 6.1 (1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -26.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -24.$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10.$

演習 6.2

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -22 & 2 & 10 \\ 14 & -1 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 5 \\ 7 & -1/2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

演習 6.3 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とする.

(必要性) 3 つの平面が 1 本の直線を共有するならば, 少なくとも原点でないある 1 点 (x_0, y_0, z_0) $(\neq (0,0,0))$ を共有するはずである. このとき,

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, もし $|A| \neq 0$ であったとすると, A は正則だから逆行列 A^{-1} が存在することになるが, 上の式の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となってしまい, (x_0, y_0, z_0) が原点でないことに反する. 従って $|A| = 0$ でなければならない.

(十分性) $|A| = 0$ とすると, $|{}^tA| = 0$ だから, (教科書の定理 3.17 より) $\boldsymbol{v}({}^tA) = (0,0,0)$ となるようなゼロでないベクトル $\boldsymbol{v} = (x_0, y_0, z_0)$ が存在する. $\boldsymbol{v}({}^tA) = (0,0,0)$ を転置して書き直せば,

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, 問題の 3 平面が原点でない 1 点 (x_0, y_0, z_0) を共有することがわかる. 一方, 3 平面は明らかに原点も共有するので, 原点と (x_0, y_0, z_0) を結ぶ直線も共有する. $\square$