

4 行列式の定義

演習 4.1 次の行列式を求めよ.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & (2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 (3) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} & (4) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 (5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} & (6) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 16 & 13 \\ 14 & 9 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

演習 4.2 4×4 の行列式の計算でよくある間違いは, サラスの方法と同様にやってしまうというものです. なぜそのように計算してはいけないのか, 計算中に登場する項を正しい定義と比較しつつ詳細に説明してください.

時間が余った人は, 次も考えてみてください.

演習 4.3 もう一つ, よくある間違いから. 教科書の補題 3.7 に

$$\left| \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \right| = |A||C|$$

という公式があります. この式から類推して, A, B, C, D が同じサイズの正方行列のときに

$$\left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right| = |A||D| - |B||C| \quad (\text{一般には不成立})$$

という式が成り立つのではないかと考える人が結構いるようですが, これは一般には成立しません.

(1) 一般には成立しない理由を, 4×4 の行列式を例にとって演習 4.2 と同様に説明してください.

(2) 特別な条件をつけて, A, B, C, D が 1×1 の正方行列の場合や, $C = O$ の場合には成立するわけですが, $B = O$ や $D = O$ の場合などはどうでしょうか?