線形代数 II 演習 (担当: 天野勝利) 2009 年 10 月 7 日

4　行列式の定義 の解答例

演習 4.1 (1) 0　(2) -38　(3) 35　(4) 43　(5) 165

$$(6)\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & 16 & 13 \\ 14 & 9 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 14 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

演習 4.2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ をサラスの方法と同様に計算すると,

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\underline{+a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}\underline{+a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}} \\ -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}\underline{-a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}\underline{-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}} \end{gathered}$$

となるが, これを正しい定義と見比べると, 本来は $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ の形の項が 24 個登場するはずの式が 8 個しか登場していない上, 正負の符号が異なっている個所があり (下線部), 行列式とは異なるものを計算していることが分かる. 例えば, 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

の値は -1 になるはずだが, サラスの方法と同様の計算では 1 になり, 異なる値が出てくる.

演習 4.3 (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ とおいて $|A||D| - |B||C|$ を計算すると,

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}) \\ = \ & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ & \underline{-a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}} \end{aligned}$$

となり, やはり 8 項しか登場しない上, 下線部は符号が異なっている. 例えば, 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

の値は 1 になるはずだが, $|A||D| - |B||C|$ の値は -1 になり, 異なる値が出てくる.

(2) $B = O$ の場合は,

$$\left| \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} \right| = |A||D|$$

が成立する. (これは教科書の補題 3.6 と同じような論法で行と列を入れ替えて証明することもできますし, 「転置行列の行列式は等しい」(教科書の定理 3.9) という行列式の性質を用いても証明できます.)

$D = 0$ の場合, A, B, C が $m \times m$ 行列だったとすると

$$\left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} \right| = (-1)^m |B||C|$$

となる. (これは, 行または列の入れ替え (教科書の定理 3.8 を参照) を m 回行うことにより証明できます.)