3 置換 の解答例

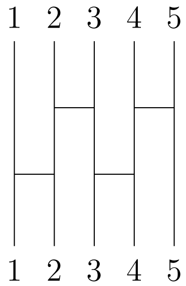
演習 3.1 (i) $(1,5,3,2,4)$, 偶置換　(ii) $(1,4,5,2,3)$, 偶置換

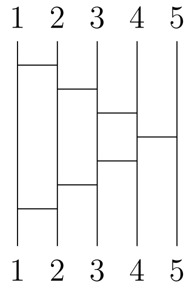
(iii) $(1,3,5,2)(4,6)$, 偶置換　(iv) $(1,4)(2,3)$, 偶置換

演習 3.2 i 番の縦線と $i+1$ 番の縦線との間に引く横線がちょうど互換 $(i,i+1)$ に対応する. (正解は下記以外にも無数にあり得ます.)

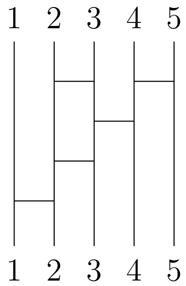
(i) $(3,4)\circ(1,2)\circ(4,5)\circ(2,3)$

(ii) $(1,5)=(1,2)\circ(2,3)\circ(3,4)\circ(4,5)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(1,2)$





(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}=(1,2)\circ(2,3)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(4,5)$



演習 3.3 S_n の中の偶置換全体の集合を A_n, 奇置換全体の集合を B_n とする. $S_n=A_n\cup B_n$, $A_n\cap B_n=\emptyset$ (空集合[1]) で, S_n の元の数は $n!$ 個だから, A_n と B_n の元の個数が等しいことを示せば, その数がちょうど $n!/2$ 個ずつであることがいえる.

A_n と B_n の元の個数が等しいことを証明するには, ある全単射 $f:A_n\to B_n$ が存在することを示せばよい. そこで, 写像 $f:A_n\to B_n$ を $\sigma\in A_n$ に対して $f(\sigma)=(1,2)\circ\sigma$ とすることにより定義する. (σ が偶置換ならば $(1,2)\circ\sigma$ は奇置換だから, f はちゃんと A_n から B_n への写像になっている.) また同様に, 写像 $g:B_n\to A_n$ を $\rho\in B_n$ に対し $g(\rho)=(1,2)\circ\rho$ により定める. そうすると, $(1,2)\circ(1,2)=(1)$ (恒等置換) だから, $g\circ f=\mathrm{id}_{A_n}$, $f\circ g=\mathrm{id}_{B_n}$ であることが分かる. よって, 演習 2.3 により f は全単射である. $\square$

[1]つまり A_n と B_n の共通部分がない