2 写像について (全射・単射)

置換の話の前段階として, 今日は写像の概念について (特に全射・単射について) 少し演習して慣れておきましょう.

演習 2.1 $\mathbb{R}$ を実数とする. 次で与えられる写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)$ がそれぞれ全射であるかどうか, また単射であるかどうかを答えよ.

(1) $f(x)=2x-1$

(2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=x^3$

(4) $f(x)=x^3-3x$

(5) $f(x)=e^x$

演習 2.2 $f:A\to B$, $g:B\to C$ を写像とする.

(1) f,g が共に全射ならば, 合成写像 $g\circ f:A\to C$ も全射であることを示せ.

(2) f,g が共に単射ならば, 合成写像 $g\circ f:A\to C$ も単射であることを示せ.

(3) f,g が共に全単射ならば (1), (2) により $g\circ f$ も全単射になる. このとき $g\circ f$ の逆写像は $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ であることを示せ.

集合 S に対して, S から S への恒等写像を $\mathrm{id}_S:S\to S$ と書くことにする.

演習 2.3 写像 $f:A\to B$ に対し, ある写像 $g:B\to A$ が存在して $g\circ f=\mathrm{id}_A$, $f\circ g=\mathrm{id}_B$ となるならば f は全単射であり, $g=f^{-1}$ となることを示せ.