2　写像について (全射・単射) の解答例

演習 2.1 それぞれのグラフを描いてみれば分かると思います.

(1) 全単射である.

(2) 全射でも単射でもない.

(3) 全単射である.

(4) 全射である. 単射ではない.

(5) 単射である. 全射ではない.

演習 2.2 (1) g が全射であることから, 任意の $c \in C$ に対し, ある $b \in B$ が存在して $g(b) = c$ となる. さらに, f が全射なので, この b に対してある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ となる. このとき $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 従って, 任意の $c \in C$ に対してある $a \in A$ が存在して $(g \circ f)(a) = c$ となることが言えたので, $g \circ f$ は全射である.

(2) $a, a' \in A$, $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ であったとする. すると, まず $g(f(a)) = g(f(a'))$ と g が単射であることにより, $f(a) = f(a')$. さらに, f が単射であることにより $a = a'$ を得る. 従って, $g \circ f$ は単射である.

(3) 任意の $c \in C$ に対し,

$$(g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(c)) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(c)))) = g(g^{-1}(c)) = c.$$

よって, $(g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$ となる ($g \circ f$ により c に移る A の元は唯一つであり, それが $(g \circ f)^{-1}(c)$ の定義だったので). 従って, 写像として $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である.

演習 2.3 (全射) 任意の $b \in B$ に対し, $a = g(b) \in A$ とすれば, $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{id}_B(b) = b$. よって f は全射である.

(単射) $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ であったとすると, $g(f(a)) = g(f(a'))$ となるが, $g \circ f = \mathrm{id}_A$ だからこれは $a = a'$ を意味する. よって f は単射である.

以上より, f が全単射であることが言えたので, 逆写像の定義により $g = f^{-1}$ は明らか (任意の $b \in B$ に対し, $f(g(b)) = b$ より $g(b) = f^{-1}(b)$. よって $g = f^{-1}$.)