13. 多項式環 $K[X]$ のイデアル・最大公約元

K は有理数全体 $\mathbb{Q}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ のいずれかとし, K 係数の (一変数) 多項式全体のなす環 $K[X]$ を考える. 整数環と同様に, $K[X]$ の部分集合 I が次の (i)(ii) を満たすとき, I を $K[X]$ の**イデアル**という:

(i) 任意の $f(X), g(X) \in I$ について $f(X) + g(X) \in I$,

(ii) 任意の $r(X) \in K[X]$, $f(X) \in I$ について $r(X)f(X) \in I$.

$K[X]$ の任意のイデアルは加法に関する部分群となっているが, 整数環の場合 (問題 10.2) とは違い, $K[X]$ の加法に関する部分群が常にイデアルになるとは限らない (例えば $\{nX \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は加法に関する $K[X]$ の部分群だが, イデアルではない).

$f_1(X), \ldots, f_n(X) \in K[X]$ に対して

$$I(f_1(X), \ldots, f_n(X)) = \{g_1(X)f_1(X) + \cdots + g_n(X)f_n(X) \mid g_1(X), \ldots, g_n(X) \in K[X]\}$$

は $K[X]$ のイデアルである. これを $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ が生成するイデアルといい, $\langle f_1(X), \ldots, f_n(X)\rangle$ や $(f_1(X), \ldots, f_n(X))$ などと表すこともある.

また, 整数環と同様に, $K[X]$ の任意のイデアル I に対してある $d(X) \in K[X]$ が存在し, $I = \langle d(X)\rangle$ と書ける (教科書の定理 2.18). $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in K[X]$ に対して

$$\langle f_1(X), \ldots, f_n(X)\rangle = \langle d(X)\rangle$$

となる $d(X)$ のうち (必要なら適当に定数倍して) ゼロ多項式またはモニック多項式となるものを選べば, その $d(X)$ が $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ の最大公約元である (教科書の例 2.19).

問題 13.1. 次で与えられる $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ の最大公約元を求めよ.

(1) $f_1(X) = X^5 + 4X^3 + X^2 + 3X + 3$, $f_2(X) = X^3 - X^2 + 3X - 3$.

(2) $f_1(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $f_2(X) = X^3 - X^2 + X + 1$.

(3) $f_1(X) = X^3 + 2X^2 + X$, $f_2(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 9X + 6$.

(4) $f_1(X) = 2X^4 - 4X^3 + 6X^2 + 7X + 1$, $f_2(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 4$.

(5) $f_1(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - 3X$, $f_2(X) = X^4 - X$, $f_3(X) = X^3 - 2X^2 + X$.

(6) $f_1(X) = X^5 + 4X^3 + X^2 + 3X + 3$, $f_2(X) = X^3 + X + 1$, $f_3(X) = X^4 + 4X^2 + 3$.

問題 13.2. $f_1(X), \ldots, f_n(X) \in K[X]$ について, 次の (a) と (b) が同値であることを示せ.

(a) $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ の最大公約元が 1 である.

(b) $s_1(X)f_1(X) + \cdots + s_n(X)f_n(X) = 1$ となる $s_1(X), \ldots, s_n(X) \in K[X]$ が存在する.