11. 合同式

問題 11.1. a, b, m, n を整数, $m, n > 1$ とする.

(1) $a \equiv b \pmod{mn}$ ならば $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $a \equiv b \pmod{n}$ であることを示せ.

(2) もし $\mathrm{GCD}(m, n) = 1$ ならば上記の逆も成立することを示せ.

(3) $\mathrm{GCD}(m, n) = 1$ でないときは (1) の逆は一般に成立しない. $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $a \equiv b \pmod{n}$ であっても $a \equiv b \pmod{mn}$ ではないような例を挙げよ.

問題 11.2. a, b, c, m を整数, $m > 1$ とする.

(1) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ca \equiv cb \pmod{m}$ を示せ.

(2) もし $\mathrm{GCD}(c, m) = 1$ ならば上記の逆も成立することを示せ.

問題 11.3. b, c, m を整数, $m > 1$ とする. 合同式 $cx \equiv b \pmod{m}$ を満たすような $x \in \mathbb{Z}$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{GCD}(c, m) \mid b$ であることを示せ.

問題 11.4. 10 進法で表された数の各桁の数字の和が 3 の倍数ならば, もとの数も 3 の倍数であることを示せ. (例えば 123 について考えると, $1 + 2 + 3 = 6$ で 6 は 3 の倍数だから, 123 も 3 の倍数であることが分かる.) また, 9 の倍数についても同様のことがいえることを示せ.

問題 11.5. 次を求めよ.

(1) 100^{30} を 7 で割った余り.

(2) 23^{10} を 5 で割った余り.

(3) $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + 10^{10}$ を 11 で割った余り.

(4) $1234^3 \times 56789^2$ を 5 で割った余り.

問題 11.6. 次を満たす整数 x をひとつ求めよ.

(1) $7x \equiv 4 \pmod{19}$

(2) $11x \equiv 1 \pmod{31}$

(3) $17x \equiv 2 \pmod{23}$

(4) $31x \equiv 3 \pmod{56}$

(5) $43x \equiv 10 \pmod{221}$

(6) $52x \equiv 8 \pmod{32}$

(7) $x^2 + 2x \equiv 12 \pmod{13}$

(8) $3x^2 + 2x \equiv 1 \pmod{12}$

問題 11.7. 次を満たす整数 x をひとつ求めよ.

(1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$