9. 正規部分群・剰余群

G を群, H を G の部分群とする. もし任意の $g \in G$ に対し $g^{-1}Hg = H$ ($\Leftrightarrow Hg = gH$) が成り立つならば, H を G の**正規部分群**といい, $G \rhd H$ と書く. (とくに, G がアーベル群ならば G の任意の部分群は正規部分群である.)

問題 9.1. 次の (a)(b)(c) が同値であることを示せ.

(a) H が G の正規部分群.

(b) 任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}Hg \subset H$.

(c) 任意の $g \in G$, $h \in H$ に対して, ある $h' \in H$ が存在して $h = gh'g^{-1}$.

問題 9.2. 次の G, H について, H が G の正規部分群になるかどうかを調べよ.

(1) $G = S_4 \supset H = \{(1),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,3,2),\ (1,2,3,4)\}$

(2) $G = S_4 \supset H = \{(1),\ (1,2),\ (3,4),\ (1,2)(3,4)\}$

(3) $G = S_4 \supset H = \{(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$

(4) $G = D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = s^2 = e,\ sr = r^{-1}s\rangle \supset H = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

(5) $G = D_{12} \supset H = \{e, rs\}$

(6) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \supset H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(7) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \supset H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$

問題 9.3. G を群, H を G の部分群とする. もし $[G : H] = 2$ ならば H は G の正規部分群であることを示せ.

問題 9.4. G を群, H を G の部分群, K を G の正規部分群とする.

(1) $HK = KH$, 従って HK は G の部分群になることを示せ.

(2) $H \cap K$ は H の正規部分群になることを示せ.

(3) HK が有限群のとき, $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$ となることを示せ.

問題 9.5. G を群, H, K を G の正規部分群とする.

(1) $G \rhd HK$ を示せ.

(2) $G \rhd H \cap K$ を示せ.

問題 9.6. $\varphi : G \to G'$ を群の準同型とする.

(1) $G \rhd H$ ならば $\varphi(G) \rhd \varphi(H)$ であることを示せ.

(2) $G' \rhd H'$ ならば, $G \rhd \varphi^{-1}(H')$ であることを示せ.

$\varphi : G \to G'$ を群の準同型, e' を G' の単位元とするとき, e' の逆像 $\varphi^{-1}(e') = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$ を $\operatorname{Ker}\varphi$ と書き, φ の**核** (**kernel**) という.

問題 9.6'. $\varphi : G \to G'$ を群の準同型, e を G の単位元とする.

(1) $\operatorname{Ker}\varphi$ は G の正規部分群であることを示せ.

(2) φ が単射であることと $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$ が同値であることを示せ.

さて, G を群, H を G の正規部分群とし, H の左剰余類全体の集合を $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ と書く. このとき G/H は積

$$\begin{array}{rcl} (G/H) \times (G/H) & \to & G/H \\ (g_1H, g_2H) & \mapsto & g_1g_2H \end{array}$$

に関して群となる. これを G の H による**剰余群**という.

問題 9.7. (1) 上記の積が写像として well-defined であること, すなわち $(g_1H, g_2H) = (g_1'H, g_2'H)$ のときはちゃんと $g_1g_2H = g_1'g_2'H$ となることを示せ.

(2) 上記の積が結合律を満たし, さらに単位元, 逆元をもち, 確かに G/H が群になることを示せ.

(3) $\varphi : G \to G/H$, $g \mapsto gH$ は準同型写像で, $\operatorname{Ker}\varphi = H$ となることを示せ.

問題 9.8. G を巡回群, H をその部分群とすると, (G はアーベル群なので) $G \rhd H$ である. このとき剰余群 G/H も巡回群となることを示せ.

$G \rhd H$ のとき, $|G/H| = [G : H]$ だから, H の指数が有限ならば G/H は有限群である.

問題 9.9. 実数全体 $\mathbb{R}$ が加法に関してなす群を考える. H を $\mathbb{R}$ の部分群とするとき, もし H の指数 $[\mathbb{R} : H]$ が有限ならば $H = \mathbb{R}$ であることを示せ.

$\varphi : G \to G'$ を群の準同型とするとき,

$$\begin{array}{rcl} \bar{\varphi} : G/\operatorname{Ker}\varphi & \to & \operatorname{Im}\varphi \\ g\operatorname{Ker}\varphi & \mapsto & \varphi(g) \end{array}$$

は同型写像になり, $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ であることが分かる (**準同型定理**).

問題 9.10. 上記を確かめよ.

(1) $\bar{\varphi}$ が写像として well-defined であること, つまり, $g\operatorname{Ker}\varphi = g'\operatorname{Ker}\varphi$ のときはちゃんと $\varphi(g) = \varphi(g')$ となることを示せ.

(2) $\bar{\varphi}$ が同型写像であることを証明せよ.