7. 群の直積

問題 7.1. (1) G, H を群とするとき, 直積集合 $G \times H$ は積 $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ により群となることを示せ. (これを G と H の**直積 (群)** という.)

(2) 写像 $G \times H \to H \times G$, $(g, h) \mapsto (h, g)$ が同型写像であることを示せ.

問題 7.2. 同型 $\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ. ただし, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は乗法群, $\mathbb{R}$ は加法により群とみなしているものとする.

問題 7.3. 教科書の定理 1.22 を使って, 次の 5 個のアーベル群を同型により類別せよ.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$

問題 7.4. G を群, H, K を G の部分群とする. 写像 $\varphi : H \times K \to G$, $(h, k) \mapsto hk$ について, 次を示せ.

(1) φ が群準同型 $\Leftrightarrow hk = kh$ $({}^\forall h \in H, {}^\forall k \in K)$.

(2) φ が単射 $\Leftrightarrow H \cap K = \{e\}$.

(3) 上記の (1)(2) がともに成立するならば HK は G の部分群で, $HK \cong H \times K$.

((3) のとき HK を H と K の**内部直積**という.)

8. 剰余類・ラグランジュの定理

問題 8.1. G を群, H を G の部分群とする. $a, b \in G$ について, 次の (i)〜(v) は同値であることを示せ.

(i) $aH = bH$

(ii) $a^{-1}b \in H$

(iii) $b \in aH$

(iv) $a \in bH$

(v) $aH \cap bH \neq \emptyset$

G を群, H を G の部分群とする. $g \in G$ に対し, gH を (g に代表される) H の**左剰余類**という. $a \sim b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} aH = bH$ により G の元の間に関係式 $\sim$ を定義すると, これは同値関係となる. gH は $\sim$ に関するひとつの同値類に他ならない. これにより G を同値類別すると, (H もひとつの同値類であるから) e を含むような完全代表系を考えることができる. 特に G が有限群のとき, $\{e, g_1, \ldots, g_k\}$ をそのような完全代表系とすると,

$$G = H \cup g_1 H \cup \cdots \cup g_k H$$

かつ $H, g_1 H, \ldots, g_k H$ のどの 2 つも共通部分をもたないようにできる. このとき, H と各 $g_i H$ たちの元の個数はすべて $|H|$ に等しいから,

$$|G| = (k + 1)|H|$$

を得る. 従って $|H|$ は $|G|$ の約数である (**ラグランジュの定理**). またこのとき $(k+1)$ を G における H の**指数**といい, $[G:H]$ で表す.

問題 8.2. G を有限群, H を G の部分群, K を H の部分群とする. このとき, 指数の関係式 $[G:K]=[G:H][H:K]$ が成り立つことを示せ.

問題 8.3. G を有限群とする.
(1) g を G の任意の元とすると, g の位数は G の位数 $|G|$ の約数であることを示せ.
(2) もし $|G|$ が素数ならば, G は巡回群であることを証明せよ.

問題 8.4. (1) 位数 4 の群は必ず $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のどちらかと同型になることを示せ.
(2) 位数 6 の群は必ず $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ または 3 次の対称群 S_3 のどちらかと同型になることを示せ.

問題 8.5. G を群, H を G の部分群, g を G の任意の元とする.

(1) $g^{-1}Hg$ も G の部分群であることを示せ.

(2) 同型 $H\cong g^{-1}Hg$ を示せ.

(3) G が有限群のとき, G における H の指数 $[G:H]$ と $g^{-1}Hg$ の指数 $[G:g^{-1}Hg]$ は等しいことを示せ.