6. 準同型写像

G, H を群とする. 写像 $\varphi : G \to H$ が**準同型写像**であるとは, φ が群演算を保存すること, すなわち, 任意の $a, b \in G$ に対して $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を満たすことをいう (ab は G の積, $\varphi(a)\varphi(b)$ は H の積). 特に, 全単射な準同型写像を**同型写像**という.

問題 6.1. (1) G, G' を群とする. $\varphi : G \to G'$ が同型写像であるとき, φ の逆写像 φ^{-1} も同型写像であることを示せ.

(2) G, G', G'' を群とする. $\varphi : G \to G'$ と $\psi : G' \to G''$ が準同型写像であるとき, 合成写像 $\psi \circ \varphi : G \to G''$ も準同型写像であることを示せ.

(3) G, G', G'' を群とする. $\varphi : G \to G'$ と $\psi : G' \to G''$ が同型写像であるとき, 合成写像 $\psi \circ \varphi : G \to G''$ も同型写像であることを示せ.

ある群 G から群 H への同型写像が存在するとき, G と H は**同型**であるといい, $G \cong H$ と書く.

問題 6.2. 実数全体が加法に関してなす群 $(\mathbb{R}, +)$ と, 正の実数全体が乗法に関してなす群 $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ が同型であることを示せ.

問題 6.3. 位数の等しい巡回群はすべて同型であることを示せ.

問題 6.4. G, G' を群, $\varphi : G \to G'$ を準同型写像とする.

(1) $e \in G$ が G の単位元ならば, $\varphi(e)$ は G' の単位元になることを示せ.

(2) 任意の $g \in G$ に対し, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ となることを示せ.

問題 6.5. G, G' を群, $\varphi : G \to G'$ を準同型写像とする.

(1) H を G の部分群とするとき, φ による H の像 $\varphi(H) = \{\varphi(h) \mid h \in H\}$ は G' の部分群であることを示せ.

(2) H' を G' の部分群とするとき, φ による H' の逆像 $\varphi^{-1}(H') = \{g \in G \mid \varphi(g) \in H'\}$ は G の部分群であることを示せ.

問題 6.6. (1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への準同型写像をすべて求めよ.

(2) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ への準同型写像をすべて求めよ.

(3) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への準同型写像をすべて求めよ.

(4) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への準同型写像をすべて求めよ.

(5) n を 2 以上の自然数とするとき, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像は唯一つしかないことを示せ.