

5. 群の例 (その 2)

問題 5.1. $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は複素数の積に関して群になる. \mathbb{C}^\times の有限部分群はすべて巡回群であることを示せ.

[コメント] 問題 3.6 (2) が解かれた後にやってみてください.

問題 5.2. S_n を n 次の対称群とする.

(1) $m = 1, 2, \dots, n$ に対し, S_n の中に位数 m の元が必ず存在することを示せ.

(2) m を n より大きい自然数とすると, S_n の中に位数 m の元が存在することはあるか? もしあると思うならそのような例を挙げ, ないと思うなら存在しないことを証明せよ.

問題 5.3. 次に挙げる S_4 の部分集合が部分群になるかどうかを調べよ.

$$(1) H_1 = \{(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 2, 3, 4)\} \subset S_4$$

$$(2) H_2 = \{(1), (1, 3)(2, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 2, 3, 4)\} \subset S_4$$

$$(3) H_3 = \{(1), (2, 3, 4), (2, 3), (3, 4), (2, 4, 3), (2, 4)\} \subset S_4$$

$$(4) H_4 = \{(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subset S_4$$

$$(5) H_5 = \{(1), (1, 2) \circ (2, 3), (1, 3) \circ (3, 4), (1, 4) \circ (2, 4)\} \subset S_4$$

$$(6) H_6 = \{(1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \subset S_4$$

[コメント] 乗法表を作りながら考えてみましょう. もし部分群であることが分かったら, 下の問題も一緒にやってみてください.

問題 5.4. 上記の H_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) たちのうち部分群になるものだけをとる. それぞれについて, H_i を生成する部分集合 X のうち元の数が最小のものを一つ求めよ.

問題 5.5. (1) S_4 の位数 3 の部分群をすべて求めよ.

(2) S_4 の位数 4 の部分群をすべて求めよ.

問題 5.6. (1) 2×2 行列の集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は行列の積に関して群になることを示せ.

(2) 上記の群を生成する部分集合のうち元の数が最小のものを一つ求めよ.