

前回は授業よりちょっと先走りすぎてしまったので (すみません), 少し戻ります.

4. 群の例 (その1)

問題 4.1. (1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の加法表を作れ.

(2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の加法表を作れ.

(3) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の加法表を作れ.

(4) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ の乗法表を作れ.

(5) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ が巡回群であることを確かめよ.

(6) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ の乗法表を作れ.

(7) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ が巡回群であることを確かめよ.

(8) $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ が巡回群であることを確かめよ.

(9) $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ が巡回群であることを確かめよ.

(10) $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ が巡回群であることを確かめよ.

問題 4.2. 次の元の位数を求めよ.

(1) $2 \in \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$

(2) $3 \in \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$

(3) $100 \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$

(4) $10 \in (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$

(5) $95 \in (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$

(6) $14 \in (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$

(7) $2 \in (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$

[ヒント] 101 は素数です. (5) 計算がんばって. (6) は (5) を, (7) は (6) をうまく使うと効率よく求められます.

問題 4.3. \mathbb{Z} は 1 で生成される巡回群で, \mathbb{Z} の部分群も必ず巡回群になることが知られている (問題 3.5 (1)). 例えば $\mathbb{Z} \supset \langle 3, 6 \rangle = \langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z} \supset \langle 2, 3 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ である. 次に出てくる \mathbb{Z} の部分群はどの整数で生成される巡回群かを答えよ.

(1) $\mathbb{Z} \supset \langle 4, 6 \rangle$

(2) $\mathbb{Z} \supset \langle 9, 15 \rangle$

(3) $\mathbb{Z} \supset \langle 7, 12 \rangle$

(4) $\mathbb{Z} \supset \langle 6, 14, 34 \rangle$

問題 4.4. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の部分群をすべて求めよ. (問題 3.3 の類題です.)