代数入門演習 (担当: 天野勝利)[1] 2009 年 9 月 7 日

1. 群の定義

問題 1.1. 次の (1)〜(10) で与えられる集合と演算 $\bullet$ が群の定義を満たすかどうかを調べ、群になる場合はアーベル群かどうかを述べよ. また, 群にならないときは群の定義のどこが成り立たないかを指摘せよ.

(1) 集合は複素数全体 $\mathbb{C}$, 演算は, $a, b \in \mathbb{C}$ に対し $a \bullet b = ab$ (複素数の積).

(2) 集合は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (複素数全体から 0 を除いた集合), 演算 $\bullet$ は (1) と同様に複素数の積.

(3) 集合は有理数全体 $\mathbb{Q}$, 演算は, $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し $a \bullet b = -a - b$.

(4) 3つの元からなる集合 $S = \{x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	x	y	z
x	y	z	x
y	z	x	y
z	x	y	z

(例)
$x \bullet x = y$
$x \bullet y = z$
$z \bullet y = y$

(5) 集合 $S = \{x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	x	x
z	z	x	z

(例)
$x \bullet x = x$
$x \bullet y = y$
$z \bullet y = x$

(6) 4つの元からなる集合 $S = \{w, x, y, z\}$ に次の表によって演算 $\bullet$ を定めたもの:

$\bullet$	w	x	y	z
w	w	x	y	z
x	x	w	z	y
y	y	z	w	x
z	z	y	x	w

(7) W をアルファベットの小文字1文字以上からなる文字列 (スペースは含まない) 全体の集合とする. $a, b \in W$ に対して $a \bullet b$ は文字列 a の後に文字列 b をつなげたもの. 例えば $a = \mathsf{daisuu}$, $b = \mathsf{gaku}$ のとき, $a \bullet b = \mathsf{daisuugaku}$.

(8) 上記の $(W, \bullet)$ に “0 文字の文字列” (便宜上, 記号 e で表す) を加えたもの. 任意の $a \in W \cup \{e\}$ に対して $e \bullet a = a \bullet e = a$ とする.

[1] ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/˜amano/lec2009-2/e-algebra-ex/index.html

(9) 上記にさらに別の元 d を加える. 文字列 a に対し, $a \bullet d$ は a の末尾の 1 文字を除いたもの, $d \bullet a$ は a の先頭の 1 文字を除いたものとする (ただし, e に対しては $e \bullet d = d \bullet e = e$). 例えば, $a =$ daisuu のとき, $a \bullet d =$ daisu, $d \bullet a =$ aisuu. また, d 同士の積は $d \bullet d = d$ とする.

(10) 集合は $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{C}, \\ ac \neq 0 \end{array} \right\}$, 演算 $\bullet$ は, $A, B \in T$ に対して $A \bullet B = AB$ (行列の積) で定める.

(11) 集合は $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\}$, 演算 $\bullet$ は行列の積で定める.

問題 1.2. G を群とする.

(1) G の単位元は唯一つしか存在しないことを示せ. (つまり, ある $e, e' \in G$ があって, 任意の $x \in G$ に対し $ex = x = xe$, $e'x = x = xe'$ を満たすならば $e = e'$ であることを示せ.)

(2) 任意の $x \in G$ に対し, x の逆元は唯一つしか存在しないことを示せ. (つまり, G の単位元を e とするとき, ある $x', x'' \in G$ があって, $xx' = e = x'x$, $xx'' = e = x''x$ を満たすならば $x' = x''$ であることを示せ.)

(3) 任意の $x, y \in G$ に対し, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ であることを示せ.

(4) 任意の $a, x, y \in G$ に対し, $ax = ay \Rightarrow x = y$ および $xa = ya \Rightarrow x = y$ が成り立つことを示せ.