10　連立 1 次方程式 (その 2)

斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ について, n を A の列の数 (= 未知変数の数) とし, $r = \operatorname{rank} A$ とすると, 解の自由度は $n - r$ となる. 言い換えると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はある $n - r$ 個の線形独立な解の組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ をもち, 一般解は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}$ と書ける ($c_1, \ldots, c_{n-r}$ は任意定数). このような $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という.

演習 10.1 次の斉次連立 1 次方程式の基本解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

一般の (斉次とは限らない) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について, 右辺を $\boldsymbol{0}$ にした斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解には次のような関係がある: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ とする. もし $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するなら, そのうちの一つを $\boldsymbol{g}$ とすると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} + c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける. (これは下の問題を解いた結果の解釈に役立ててください).

演習 10.2 次の連立 1 次方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b})$ となる (掃き出し法による解き方を想像すれば理由はすぐに分かると思います).

演習 10.3 xyz 空間座標に関する方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

で与えられる三つの平面が, (1) ちょうど一点を共有するための条件, (2) ちょうど一本の直線を共有するための条件, (3) 一つも共有点をもたないための条件, をそれぞれ行列の階数を用いて述べよ.

[ヒント] (1)(2) は解をもつ場合, (3) はもたない場合. さらに (1) と (2) の差は解の自由度の差.