

10 連立 1 次方程式 (その 2) の解答例

演習 10.1 係数行列に行変形を施して簡約階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 13 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. よって問題の式と同値な式として

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

を得る. $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$ (任意定数) とすると, 一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. よって基本解は $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

演習 10.2 係数行列が共通なので, いっぺんに解いてしまうことにする.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & | & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -5 & 7 & | & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & -1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & | & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & | & -3 & -8 \\ 0 & 3 & 6 & 13 & -7 & | & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & | & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & | & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 8 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & 25 & 65 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & | & -35 & -92 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 8 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -10 & -27 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -35 & -92 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 & 21 \end{array} \right)$$

より、一般解はそれぞれ次のようになる:

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -35 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}).$$

$$(2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -92 \\ 0 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}).$$

演習 10.3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 連立 1 次方程式に解が存在し、かつ、解の自由度が 0 であれば良いので、求める条件は

$$\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3 \quad (\Leftrightarrow \text{rank } A = 3).$$

(2) 連立 1 次方程式に解が存在し、かつ、解の自由度が 1 であれば良いので、求める条件は

$$\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2.$$

(3) 連立 1 次方程式に解が存在しなければ良いので、求める条件は、

$$\text{rank } A < \text{rank}(A | \mathbf{b}).$$