9 行列の階数と線形独立性

以下で, K は実数全体 $\mathbb{R}$ または複素数全体 $\mathbb{C}$ とする.

演習 9.1 前回の演習 8.3 の式 (1), (2) を今度は教科書の定理 2.14 を用いて示せ:

(1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

(2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

演習 9.2 n 個の n 項縦ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in K^n$ について, 次の (a), (b), (c) は同値であることを示せ:

(a) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は線形独立.

(b) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を並べて作った n 次正方行列 $A = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ は正則.

(c) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は K^n を張る.

[ヒント] ((a) $\Leftrightarrow$ (b)) は教科書の定理 2.14 と系 2.12 により得られる. ((b) $\Rightarrow$ (c)) 正則行列ならば, 列基本変形のみを繰り返して単位行列にできるはず. ((c) $\Rightarrow$ (b)) 逆に (c) が成り立つなら, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の線形結合で書けるはず.

演習 9.3 (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ を m 項縦ベクトル, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ を n 項縦ベクトルとすると,

$$A = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

は $m \times n$ 行列である. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\operatorname{rank} A = 1$ となることを示せ.

(2) 逆に, A をある $m \times n$ 行列とするとき, もし $\operatorname{rank} A = 1$ ならば, ある m 項縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と n 項縦ベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在して $A = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{y}$ と書けることを示せ.

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 9.4 一般に, A を $m \times n$ 行列, $\operatorname{rank} A = r$ とするとき, ある $m \times r$ 行列 X と $n \times r$ 行列 Y が存在して, $A = X\,{}^tY$ と書けることを示せ.