9 行列の階数と線形独立性 の解答例

演習 9.1 $r = \operatorname{rank} A$, $r' = \operatorname{rank} B$ とする. 教科書の定理 2.14 により A には r 個の線形独立な列ベクトルが存在するので, それを一組とり $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とおく. 同様に, B の r' 個の線形独立な列ベクトルをとり $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{r'}$ とする.

(1) まず, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の $r + r'$ 個の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix}$$

が線形独立であることを示す.

$$\begin{aligned}
& c_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + c_{r+1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} + \cdots + c_{r+r'} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\
\Rightarrow \ & \begin{pmatrix} c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r \boldsymbol{x}_r \\ c_{r+1} \boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'} \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ & \begin{cases} c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \\ c_{r+1} \boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'} \boldsymbol{y}_{r'} = \boldsymbol{0} \end{cases} \\
\Rightarrow \ & c_1 = \cdots = c_r = 0, \quad c_{r+1} = \cdots = c_{r+r'} = 0.
\end{aligned}$$

よって上記の $r + r'$ 個の列ベクトルは線形独立で, 従って (再び教科書の定理 2.14 により) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r + r'$ であることが分かる.

後は, $r + r'$ が線形独立な列ベクトルの最大個数であることをいえばよい. そこで以下, 任意の $r + r' + 1$ 個の列ベクトルをとったとき, それが必ず線形従属になってしまうことを示す. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ から $r + r' + 1$ 個の列ベクトルをとった場合, 次の二つのうちどちらか (あるいは両方) が成立しているはずである:

(a) 左側 $\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$ の部分から $r + 1$ 個以上の列ベクトルをとった.

(b) 右側 $\begin{pmatrix} O \\ B \end{pmatrix}$ の部分から $r' + 1$ 個以上の列ベクトルをとった.

A の $r + 1$ 個以上の列ベクトルは必ず線形従属になってしまうので, (a) の場合は左側から取った $r + 1$ 個以上の列ベクトルが線形従属になってしまうはずである. 同様

に, (b) の場合も右側からとった $r'+1$ 個以上の列ベクトルは線形従属になるはず. よって, いずれの場合も, 問題の $r+r'+1$ 個の列ベクトルは線形従属になるはずである. 以上より, $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} < r+r'+1$ となることが分かり, 前半と合わせて $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r+r'$ を得る.

(2) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ の $r+r'$ 個の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{r'} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix}$$

が線形独立であることを示せばよい (ここで, $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_{r'}$ は $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{r'}$ の上側にある C の列ベクトル).

$$c_1\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + c_{r+1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} + \cdots + c_{r+r'}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{r'} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

のとき, まずこの式の下半分より $c_{r+1}\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'}\boldsymbol{y}_{r'} = \boldsymbol{0}$ を得るので, $c_{r+1} = \cdots = c_{r+r'} = 0$. このことと式の上半分より $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots c_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ を得るので, $c_1 = \cdots = c_r = 0$. 以上により, 上記の $r+r'$ 個の列ベクトルが線形独立であるから, 教科書の定理 2.14 により, 求める不等式が成立する.

演習 9.2 ((a) $\Rightarrow$ (b)) 教科書の定理 2.14 により $\mathrm{rank}\, A = n$ だから, 系 2.12 により A は正則である.

((b) $\Rightarrow$ (a)) 系 2.12 により $\mathrm{rank}\, A = n$ である. A の列ベクトルは全部で n 個しかないので, 定理 2.14 により $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立であることが分かる.

((b) $\Rightarrow$ (c)) A が正則行列ならば, A に列基本変形を何回か施して単位行列にできる (${}^tA$ に行基本変形を何回か施して簡約階段行列にすると単位行列になっているはずだから, それを転置して考えればよい. 定理 2.3 の証明を参照). 従って, ある n 次正方行列 C が存在して $AC = E_n$ となる. $C = (c_{ij})$ とおいて $AC = E_n$ を書き直せば

$$\begin{cases} c_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_{1n}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

を得る. これにより $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ が K^n を張ることが分かる.

((c) $\Rightarrow$ (b)) もし (c) が成り立つなら, $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ の線形結合で書けるはず. それを

$$\begin{cases} c_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_{1n}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

と書いて $C = (c_{ij})$ とすれば $AC = E_n$ を得る．よって (教科書の系 2.13 により) A は正則である．

演習 9.3 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ なので, A には少なくとも 1 つは $\mathbf{0}$ でない列が存在する．よって, $\operatorname{rank} A \geq 1$. また, A の任意の 2 つの列ベクトル $y_i\boldsymbol{x}, y_j\boldsymbol{x}$ をとると, $y_j(y_i\boldsymbol{x}) - y_i(y_j\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ だから, 2 つは線形従属となる．よって $\operatorname{rank} A < 2$ で, 従って $\operatorname{rank} A = 1$ を得る．

(2) $\operatorname{rank} A = 1$ より, A には $\mathbf{0}$ でない列が存在する．そのような列を一つとり $\boldsymbol{x}$ とおく．このとき, A の j 列目 の列ベクトルを $\boldsymbol{x}_j$ とおくと, ($\operatorname{rank} A = 1$ より) 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}$ は必ず線形従属になるはずだから, $a_j\boldsymbol{x}_j + b_j\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる定数 a_j, b_j で $(a_j, b_j) \neq (0, 0)$ となるものが存在する．ここで, もし $a_j = 0$ だとすると $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に反するので $a_j \neq 0$ である．そこで, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -b_1/a_1 \\ \vdots \\ -b_n/a_n \end{pmatrix}$ とおけば, $A = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$ となる．

演習 9.4 $\operatorname{rank} A = r$ のとき, A の線形独立な r 個の列ベクトルを一組とり, それを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とおく．A の j 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とおくと ($j = 1, \ldots, n$), 各 j について, $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は線形従属になるはずだから,

$$\begin{cases} c_{10}\boldsymbol{a}_1 + c_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{1r}\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0} \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_{n0}\boldsymbol{a}_n + c_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{nr}\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0} \end{cases}$$

を満たす定数 c_{ji} たちで, $(c_{j0}, \ldots, c_{jr}) \neq (0, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$ を満たすものが存在する．ここで, 各 j について, もし $c_{j0} = 0$ であったとすると $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が線形独立であることに反するので $c_{j0} \neq 0$ である．そこで

$$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r), \quad Y = \begin{pmatrix} -c_{11}/c_{10} & \cdots & -c_{1r}/c_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1}/c_{n0} & \cdots & -c_{nr}/c_{n0} \end{pmatrix}$$

とおけば, $A = X^tY$ と書ける．