8 行列の階数 の解答例

演習 8.1 ※下記は行基本変形でいったん簡約階段行列にした後で列基本変形を施すやり方で通していますが, この問題ではべつだん簡約階段行列を経由しなくても構いません (例えば (1) は最初に列基本変形をするなどした方が実際は楽です). なお, 記述の省略のため, 一つの矢印で 2 回以上の基本変形を表している個所があります.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

演習 8.2 基本変形を何回か施して階段状の行列にできれば (上の問題のように最後まで変形しなくても) その階段の段数として行列の階数が分かる.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 2.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 3.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できるので, 階数は 2.

演習 8.3 $r = \operatorname{rank} A$, $r' = \operatorname{rank} B$ とし,

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P'BQ' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる正則行列 P, Q, P', Q' をとる.

(1) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ に左右から正則行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & O \\ O & P'BQ' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right)$$

とできる. これにさらに行の交換と列の交換を何回か施せば,

$$\left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} E_r & & \\ & E_{r'} & \\ & & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r+r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と変形できるので, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の階数は $r + r' = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ である.

(2) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ に左右から正則行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & PCQ' \\ O & P'BQ' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & PCQ' \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right)$$

とできる. ここで, 右上の部分を分割に合わせて $PCQ' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ と書けば, 上記にさらに行変形, 列変形を施して,

$$\left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{matrix} \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & \begin{matrix} O & O \\ O & C_4 \end{matrix} \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} E_r & & & \\ & E_{r'} & & \\ & & C_4 & \\ & & & O \end{pmatrix}$$

と変形できる．従って,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r + r' + \operatorname{rank} C_4 \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$