

6 簡約階段行列・掃き出し法の解答例

演習 6.1 (1)(2) のみ基本変形の経緯を書き, 他は結果だけ書きます.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

演習 6.2 答えは一意ではなく, 以下はほんの一例です.

(1) 例えば,

$$E_{12}(-3)E_2(-1/3)E_{21}(-4)E_1(1/2) \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = E_1(1/2)^{-1}E_{21}(-4)^{-1}E_2(-1/3)^{-1}E_{12}(-3)^{-1} = E_1(2)E_{21}(4)E_2(-3)E_{12}(3).$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P_{12}E_{21}(2)E_2(-1)E_{12}(2).$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = P_{13}E_{21}(-2)E_{31}(-1)E_2(-1)E_{23}(-1)E_{12}(-2).$$

演習 6.3 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$